MATEMATIKA

7

2. časť

Matematika
pre 7. ročník ZŠ
a 2. ročník
gymnázií
s osemročným
štúdiom

Orbis Pictus Istropolitana

Autori
PaedDr. Ján Žabka
RNDr. Pavol Černek, CSc.

Lektorky
Mgr. Eva Bausová
Mgr. Jarmila Dovcová
PaedDr. Lucia Ficová, PhD.
Mgr. Jana Fraasová
PaedDr. Martina Totkovičová, PhD.
Mgr. Renáta Vestegová

Cover design
Ladislav Blecha

Design
Ing. Michal Pakši

Illustrations
Mgr. art. Juraj Martiška

Foto
Archív Orbis Pictus Istropolitana
Photos.com
Colin Arnot (s. 75)

Mapa (s. 117)
RNDr. Daniel Gurňák, PhD.

Vydal ©
Orbis Pictus Istropolitana, spol. s r. o.
Miletičova 7, 821 08 Bratislava
v roku 2019 (N)

Zodpovedný redaktor
Mgr. Branislav Hriňák

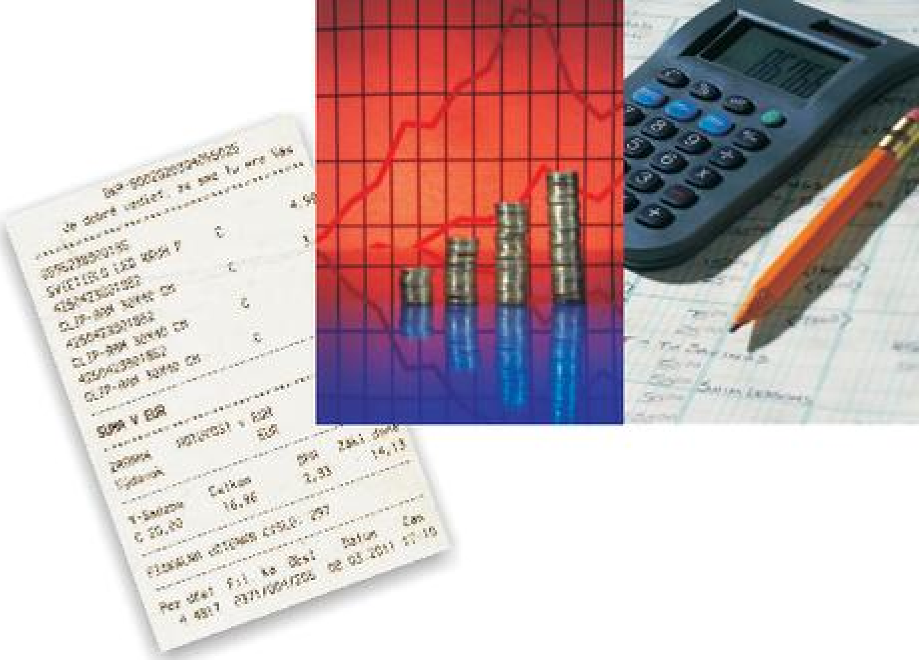
Jazyková redaktorka
Mgr. Anna Kališková

Skeny
TYPOSET, s. r. o., Bratislava

Zalomenie a predtlačová príprava
DE SIGNO s. r. o., Bratislava

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR pod č. 2018/6042:24-10K0 ako učebnicu Matematiky pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 2. časť. Schvaľovacia doložka má platnosť do 31. augusta 2020.

ISBN 978-80-8120-710-5



Milé žiačky a žiaci,

aj v 2. časti učebnice sa zoznámite so všeličím dôležitým pre váš ďalší život.

Dokončíme prácu so zlomkami a ukážeme si, ako sa s nimi počíta na kalkulačke.

Naučíte sa, čo sú percentá a promile, kde sa s nimi môžete stretnúť a ako sa s nimi pracuje. Pozrieme sa spoločne na rôzne typy závislostí, objavíme, ako sa pracuje s mierkou mapy, či ako rozdeľovať veci podľa vopred dohodnutých pravidiel. Naučíme sa tiež čítať diagramy a tabuľky, s akými sa často môžete stretnúť v novinách či časopisoch.

Okrem piktogramov, ktoré už iste poznáte, teda:

opakovanie

objavovanie a vysvetľovanie učiva

úlohy na precvičenie

úlohy pre tých, ktorých téma zaujala

hry

námety na prácu v skupinách

námety na prácu pri počítači

nájdete v učebnici aj ďalšie pestré úlohy v obľúbenej rubrike.

Želáme vám veľa príjemných chvíľ pri objavovaní tajomstiev sveta okolo nás.

Autori

Ján Žabka • Pavol Černek

Matematika

pre 7. ročník ZŠ
a 2. ročník
gymnázií
s osemročným
štúdiom

2. časť

Orbis Pictus Istropolitana
Bratislava

Vážené kolegyne, vážení kolegovia.

Druhá časť učebnice pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom sa začína dokončením *druhej kapitoly o zlomkoch*. V tejto časti sa venujeme rovnosti zlomkov a ich porovnávaniu. V učive o rovnosti zlomkov sa odvolávame na modely zlomkov zavedené v prvej časti učebnice – na pizzu, koláč a číselnú os. Žiaci prirodzeným spôsobom objavia rozširovanie a krátenie zlomkov, ktoré si aj dôkladne precvičia.
V tejto fáze by už žiaci mali mať dobrú predstavu nielen o zlomku ako o časti celku, ale aj o zlomku ako o čísle. V skupinách by mali objaviť základné spôsoby porovnávania zlomkov. Práca v skupinách (tímová práca) je dôležitá spôsobilosť, ktorú takto trénujeme. Ako jednu z možností porovnávania zlomkov uvádzame aj krížové pravidlo.

Po precvičení práce so zlomkami sa po druhý raz stretneme *s kockami a s kvádrami*, tentoraz *s ich sieťami*. Sieť kocky zavádzame prirodzene ako *„to, čo si kocka oblečie"*. V tejto fáze odporúčame na hodinách pracovať nielen s učebnicou, ale aj rysovať a strihať siete z papiera. Veľmi peknou a u detí obľúbenou aktivitou je šitie kocky z papiera. Podobne postupujeme pri učive o kvádri.
V celej kapitole o sieťach sa systematicky venujeme aj rozvoju kombinatoriky, lebo spojenie kombinatoriky a priestorovej predstavivosti považujeme za veľmi dôležité. Aj preto sme do učebnice zaradili samostatnú kapitolu *Hráme sa so sieťami kocky*. Pri znázorňovaní sietí kocky v triede pravdepodobne vznikne diskusia o tom, ktoré siete kocky považujeme za rôzne. V našich riešeniach považujeme za rôzne tie dvojice sietí, ktoré nemôžeme na seba zobraziť otočením v rovine alebo preklopením (teda otočením na rub).

S kombinatorikou sa stretneme aj po zavedení siete kocky a kvádra. V časti *Kombinatorika II* pokračujeme v trénovaní vypisovania, tentoraz s podmienkami. Žiaci si na niekoľkých úlohách precvičia viaceré spôsoby vypisovania (aj nimi vymyslené) v rozličných kontextoch.

Nasledujúcou kapitolou je tretie – posledné – stretnutie so zlomkami. V tejto časti ozrejmíme pojem racionálne číslo a prepojíme zlomok s desatinným číslom. Dovoľujeme si upozorniť, že pojmy desatinné číslo a racionálne číslo sa niekedy nesprávne považujú za ekvivalentné. V skutočnosti sa ich významy líšia: desatinné číslo je číslo s konečným desatinným rozvojom, pričom racionálne číslo môže mať aj konečný, aj nekonečný (periodický) desatinný zápis.
Súčasťou tejto kapitoly sú aj základné operácie so zlomkami – sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie zlomkov. Keďže sme sa v prvej časti učebnice práci so zlomkami venovali pomerne podrobne, žiaci by mali dokázať väčšinu učiva objaviť sami. Toto platí najmä pre sčitovanie a odčitovanie zlomkov, kde je myšlienka rovnakých menovateľov celkom prirodzená. Pri hľadaní rovnakého menovateľa odporúčame umožniť žiakom, aby hľadali akéhokoľvek rovnakého menovateľa, teda nie nutne najmenšieho. Prirodzeným rovnakým menovateľom je súčin menovateľov jednotlivých zlomkov. Dobrou pomôckou pri hľadaní rovnakých menovateľov je kalkulačka.
Skôr ako prejdeme k násobeniu a deleniu zlomkov, nechávame žiakov vymyslieť postup násobenia zlomku prirodzeným číslom. Vraciame sa pritom aj k modelu zlomku ako časti celku.
Násobenie a delenie zlomkov má pomerne jednoduché pravidlá. Ich podstata, teda PREČO sa zlomky násobia a delia práve takto, je, naopak, pomerne náročná a príliš abstraktná. Aj to je dôvod, prečo násobenie a delenie zlomkov odporúčame prebrať so žiakmi ako prácu podľa návodu. Ak sú žiaci v triede šikovnejší, je vhodné objaviť spolu s nimi podstatu princípov násobenia a delenia zlomkov pomocou obrázkov či slovných úloh a umožniť im tak „nazrieť do zákulisia" štruktúry zlomkov.
Väčší dôraz ako na objavenie postupov (toto objavovanie uvádzame ako prácu pre záujemcov) kladieme na prácu *so zlomkami na kalkulačke*, lebo práve to je spôsob, ktorý by mal ovládať každý žiak. Preto sme tejto činnosti vyhradili samostatnú kapitolu. Venujeme sa v nej počítaniu so zlomkami na kalkulačkách, ktoré neumožňujú zvoliť si prácu v režime (móde) *výpočty so zlomkami*. Túto činnosť by mali zvládnuť aj žiaci, ktorí majú kalkulačku, ktorú možno prepnúť do tohto režimu (ide zväčša o zložitejšie kalkulačky). Odporúčame však, aby sa títo žiaci na svojich kalkulačkách naučili pracovať v móde *výpočty so zlomkami* podľa návodu na obsluhu.

Po číselnej časti sa opäť venujeme geometrii, tentokrát výpočtovej. Pomocou porovnávania veľkostí sietí kocky a kvádra zavedieme pojem *povrch*. V tejto kapitole uvádzame aj námet na miniprojekt – príprava rozpočtu na vymaľovanie triedy, telocvične a pod.
Objem kocky a kvádra definujeme ako veľkosť miesta, ktoré tieto telesá zaberajú. Pred zavedením jednotiek objemu najskôr zisťujeme objem kociek a kvádrov pomocou počtu menších rovnakých kociek, z ktorých sa skladajú. Prv než odvodíme kubické jednotky objemu, venujeme sa v bežnom živote častejšie používaným jednotkám – litru a jeho násobkom. Aby žiaci získali lepšiu predstavu o týchto jednotkách, uvádzame aj úlohy, respektíve obrázky, v ktorých vystupujú reálne objekty. Odporúčame túto časť podľa záujmu žiakov ešte rozšíriť. Inšpiráciou k tomu je aj kapitola *Ako meriame objem v domácnosti*. Námetmi môžu byť rozmanité fľaše či nádoby – od fľaštičky na kvapky do nosa až po veľké smetné kontajnery.
Podobne ako pri jednotkách dĺžky a obsahu sa krátkou poznámkou zmienime aj o jednotkách objemu v iných krajinách (pinta, barel...), s ktorými sa bežne stretávame napríklad v správach alebo vo filmoch. Vzhľadom na to, že týchto „zahraničných" jednotiek

je veľmi veľa, táto téma nie je vhodná do písomných prác alebo na ústne skúšanie. Odporúčame dať ju spracovať žiakom, ktorí si môžu napríklad pripraviť prezentáciu. Ak budú pracovať v skupinách, precvičia si zároveň aj tímovú prácu.
Po týchto kapitolách nasleduje objavovanie kubických jednotiek. Pri ich premieňaní používame podobnú štruktúru, ako sme používali pri premieňaní jednotiek dĺžky a obsahu, žiaci by preto na ňu mali byť zvyknutí. V závere tejto kapitoly prepojíme kubické jednotky s litrami a precvičíme aj toto vzájomné premieňanie.

Ďalšou dôležitou kapitolou a učivom užitočným pre život sú *percentá*. Percentá zavádzame ako spôsob porovnávania častí celku, ktoré nemajú rovnaký základ. Túto myšlienku a jej osvojenie považujeme za dôležité, preto jej venujeme primerane veľa miesta a využívame rôzne kontexty. Práca s percentami je prácou so stotinami, a tak sa často odvolávame aj na zlomky. Postupne prechádzame cez tri štandardné typy úloh (vypočítanie percentovej časti, počtu percent a základu). Výpočty uskutočňujeme najčastejšie cez jedno percento, pretože to považujeme za najprirodzenejší spôsob výpočtu. Keďže s percentami sa v živote stretávame veľmi často, aj v učebnici uvádzame rozličné kontexty (prieskumy, šetrenie, stúpanie a klesanie...).
Osobitne sa venujeme pojmu *promile*. Aj pri ňom sa odvolávame na prácu so zlomkami, konkrétne s tisícinami. Opäť spomíname stúpanie a klesanie a venujeme sa aj množstvu alkoholu v krvi, čo je pravdepodobne najčastejšie sa vyskytujúci kontext s promile z bežného života.
Samostatne sa venujeme aj rozvoju *finančnej gramotnosti*. Okrem daní pracujeme aj s úrokmi, s úrokovou sadzbou, respektíve s úrokovou mierou. Táto téma by podľa nášho názoru mala mať v učive ešte viac miesta, preto ju odporúčame rozšíriť. Keďže pri finančných transakciách často dochádza k zaokrúhľovaniu čísel rôznymi spôsobmi, vraciame sa k zaokrúhľovaniu nadol a k zaokrúhľovaniu nahor.
Kapitolu o percentách zakončujeme prácou *s diagramami*. Podľa štátneho vzdelávacieho programu sa majú žiaci naučiť pracovať s obdĺžnikovým a kruhovým diagramom, a tak im venujeme najväčšiu pozornosť. V rámci rozšírenia učiva v školskom vzdelávacom programe však odporúčame doplniť aj ďalšie typy diagramov, napríklad rozdielne diagramy uvádzané napríklad v programe Excel. V prípade, že to podmienky školy dovoľujú, je vhodné venovať priestor aj kresleniu grafov v počítači.

Po percentách sa posledný raz vrátime ku *kombinatorike*. Riešením úloh o turnajoch, vypisovaní čísel či heslách precvičujeme schopnosť systematického vypisovania aj využitia kombinatorického pravidla súčtu a súčinu. Dôležitou súčasťou tejto kapitoly je učenie sa na vlastných aj cudzích chybách. Snažíme sa ukázať, že chyba je prirodzený prvok v procese učenia a je potrebné sa s ňou naučiť pracovať a dokázať ju využiť vo svoj prospech.

Predposlednou kapitolou je *pomer a úmera*. Opäť vychádzame zo situácie zo života – rozdeľovanie odmeny za vykonanú prácu. Upozorňujeme na možné problémy a v skupinách sa usilujeme tieto problémy riešiť. Po úvodnej motivácii pristupujeme k rozdeľovaniu v danom pomere. Keďže s pomerom sa môžeme často stretnúť v rôznych článkoch, využívame toto učivo aj na precvičovanie čítania s porozumením.
Samostatne sa venujeme špeciálnemu pomeru – *mierke mapy a plánu*. V tejto časti odporúčame pracovať s viacerými reálnymi mapami, prípadne spojiť hodiny matematiky a geografie.

Ako poslednú kapitolu sme zaradili *priamu a nepriamu úmernosť*. Zaradenie úmernosti na koniec učebnice je vedomé. S priamou úmernosťou sa totiž žiaci stretávajú prakticky od piateho ročníka. Preto túto kapitolu chápeme jednak ako zhrnutie postupov, s ktorými sa už žiaci stretli, ďalej ako rozšírenie týchto postupov o nepriamu úmernosť a o ich automatizáciu, ale aj ako prípravu na učivo 8. ročníka – závislosti a funkcie.

Dovoľujeme si upozorniť, že aj *v rubrikách*, ktoré sa nachádzajú priebežne v celej učebnici, sa žiaci stretnú s jednotlivými učivami – či už je to propedeutika, alebo precvičovanie v reálnych situáciách. Ide napríklad o stereometriu (*Vtáčia búdka, Jakubove výrobky, Preklápanie*) či o percentá a diagramy (*Miera nezamestnanosti, Voľby starostu, Záujmové krúžky*). Úlohy z rubriky by mali byť príjemným spestrením hodín matematiky. Upozorňujeme však, že väčšina z týchto úloh vyžaduje viac času, ako sa na prvý pohľad môže zdať.

Uvedomujeme si, že rozdelenie učiva navrhnutého v učebnici či členenie alebo poradie kapitol nemusia vyhovovať každému učiteľovi. Nie je však možné vyhovieť predstavám všetkých vyučujúcich. Práve preto má každý učiteľ právo a zároveň aj možnosť v rámci školského vzdelávacieho programu upraviť napríklad poradie kapitol alebo rozšíriť ich obsah.

Veríme, že každý učiteľ nájde v učebnici dostatok námetov aj úloh na precvičenie učiva. Zároveň je vhodné, aby si každý vyučujúci upravil a najmä rozšíril učivo podľa svojich predstáv tak, aby mu čo najviac vyhovovalo.

Želáme veľa príjemných hodín matematiky s vašimi žiakmi.

Autori

Literatúra:

KUBÁČEK, Z. – ČERNEK, P. – ŽABKA, J. a kol.:
Matematika a svet okolo nás – zbierka úloh.
Bratislava: Vydavateľstvo Mgr. Pavol Cibulka, 2008, 200s.

5 ZLOMKY II – pokračovanie

Zlomok ako číslo

Môžu byť zlomky rovnaké?

Pri zisťovaní, či môžu byť niektoré zlomky rovnaké, si pomôžeme číselnou osou. Najskôr si ale pripomenieme, ako je to s rovnosťou desatinných čísel.

1 Znázornite na tej istej číselnej osi čísla 2,5; 2,50 a 2,500. Čo pozorujete?

2 Nájdite medzi číslami rovnaké, len inak napísané.
a) 3,2; 0,32; 3,20; 0,032; 3,02; 0,320; 0,023; 2,03
b) 8; 0,008; 0,080; 0,8; 8,00; 80; 0,80; 0,800; 0,08

Pripomíname si

Ak na koniec desatinného čísla (za desatinnou čiarkou) pridáme nulu, veľkosť desatinného čísla sa nezmení.

3 Znázornite na číselnú os s jednotkovou dĺžkou 4,5 cm číslo $\frac{6}{9}$.
Aká bude jeho vzdialenosť od 0?

4 Na číselnú os z úlohy 3 znázornite číslo a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{8}{12}$. Vypočítajte ich vzdialenosť od 0.
Čo pozorujete?

Milan: Mne vyšli všetky tri vzdialenosti 3 cm. Mám to dobre?

Viera: Aj mne to tak vyšlo. Budeme to mať dobre.

Milan: To však znamená, že sa všetky tri čísla znázornili do toho istého bodu. Nie je to čudné?

Viera: Podľa mňa nie, lebo všetky tri asi budú to isté číslo, len inak napísané.

Milan: Asi máš pravdu, veď s niečím podobným sme sa stretli aj pri desatinných číslach. Napríklad 2,5 = 2,50 = 2,500.

5 Pomocou znázornenia na číselnej osi s jednotkovou dĺžkou 6 cm nájdite medzi číslami $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{15}$ dvojice, ktoré sa zobrazia do toho istého bodu.

6 Nájdite medzi číslami $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{28}{35}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{15}{6}$ dvojice, ktoré sa zobrazia do toho istého bodu tak, že vypočítate ich vzdialenosť od 0. Jednotkovú dĺžku si zvoľte sami (odporúčame 280 mm).

> **!** Dve čísla považujeme za rovnaké, ak sa na tej istej číselnej osi zobrazia do toho istého bodu.

7 Zistite, ktoré rovnosti **ne**platia.

$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$; $\frac{3}{5} = \frac{5}{8}$; $\frac{21}{3} = 7$; $\frac{1}{5} = 0{,}5$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{9}{6} = \frac{10}{7}$

8 Nájdite aspoň tri zápisy čísla, ktoré sa zobrazí do bodu vyznačeného na číselnej osi červeno.

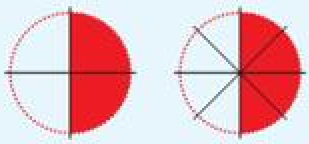
a) 

b) 

Vráťme sa k zlomkom ako častiam celku.

9 V reštaurácii boli na stole dve rovnaké pizze. Jedna bola rozdelená na štvrtiny a druhá na osminy. Soňa zjedla z prvej pizze dva kusy, jej kamarátka Andrea zjedla z druhej štyri kusy. Ktorá zjedla viac pizze?

Aj vy ste si nakreslili obrázok a zistili ste, že obe zjedli rovnaké množstvo – polovicu – pizze?



10 Nakreslite si do zošita štyri rovnako veľké obdĺžniky – koláče.
Vyznačte z prvého $\frac{1}{3}$, z druhého $\frac{2}{6}$, z tretieho $\frac{3}{9}$ a zo štvrtého $\frac{5}{15}$.

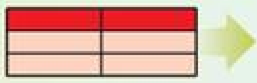
Pozrite, ako si s úlohou poradil Janko.

Janko:

Vyznačiť jednu tretinu je ľahké.

 $\frac{1}{3}$

Ak každú časť rozdelím na dve rovnaké časti, dostanem šestiny.

 $\frac{2}{6}$

Ak každú časť z prvého obrázka rozdelím na tri rovnaké časti, dostanem deviatiny.

 $\frac{3}{9}$

Ak každú časť z prvého obrázka rozdelím na päť rovnakých častí, dostanem pätnástiny.

 $\frac{5}{15}$

Takže $\frac{1}{3}$ z koláča = $\frac{2}{6}$ z koláča = $\frac{3}{9}$ z koláča = $\frac{5}{15}$ z koláča.

11 Ukážte, že zlomky $\frac{3}{5}$, $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$, $\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$, $\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$ sú rovnaké.

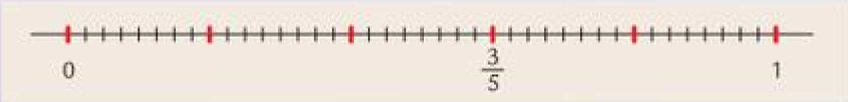
Použite číselnú os.

Aj vy ste pri zlomkoch $\frac{3}{5}$, $\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$ postupovali ako Anna?

Anna:

Na číselnú os som si znázornila zlomok $\frac{3}{5}$.

Potom som každý dielik rozdelila na 8 rovnakých častí.



Teraz je úsek od 0 po 1 rozdelený na 40 rovnakých častí. Po číslo $\frac{3}{5}$ je ich 24.

Preto $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$.

! Ak v zlomku vynásobíme čitateľa aj menovateľa tým istým číslom (iným ako 0), hodnota zlomku sa nezmení. Takúto úpravu zlomku voláme **rozšírenie zlomku**. Vynásobenie čitateľa aj menovateľa číslom 1 za rozšírenie zlomku nepovažujeme.

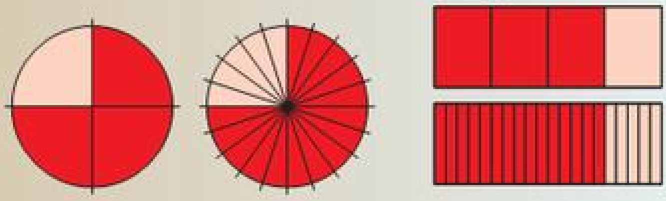
12 Rozšírte zlomok $\frac{3}{4}$ číslom 5.

Postupovali ste ako Peter?

Peter:

Rozšíriť zlomok znamená vynásobiť čitateľa aj menovateľa rovnakým číslom, preto pri rozširovaní zlomku $\frac{3}{4}$ číslom 5 budem postupovať takto:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}.$$



13 Rozšírte zlomky číslom v zátvorke.

a) $\frac{7}{3}$ (4), b) $\frac{2}{5}$ (7), c) $\frac{1}{4}$ (9), d) $\frac{2}{9}$ (5), e) $\frac{1}{2}$ (2), f) $\frac{3}{3}$ (4)

14 Nájdite 5 rovnakých zlomkov ako: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{3}{5}$, e) $\frac{9}{7}$.

15 Doplňte v zlomkoch chýbajúceho čitateľa alebo menovateľa.

a) $\frac{2}{5} = \frac{\square}{10}$, b) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{12}$, c) $\frac{7}{3} = \frac{\square}{12}$, d) $\frac{3}{4} = \frac{12}{\square}$, e) $\frac{2}{5} = \frac{10}{\square}$, f) $\frac{5}{7} = \frac{25}{\square}$,

g) $\frac{16}{30} = \frac{\square}{120}$, h) $\frac{0}{5} = \frac{\square}{30}$, i) $\frac{3}{8} = \frac{27}{\square}$, j) $\frac{9}{4} = \frac{\square}{36}$, k) $\frac{9}{4} = \frac{36}{\square}$, l) $\frac{30}{45} = \frac{10}{\square}$

16 Doplňte chýbajúce čísla.

a) $\frac{5}{6} = \frac{\square \cdot 5}{2 \cdot 6}$, b) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \square}{2 \cdot 5}$, c) $\frac{5 \cdot 5}{5 \cdot \square} = \frac{5}{6}$, d) $\frac{7 \cdot 2}{\square \cdot 2} = \frac{14}{16}$,

e) $\frac{5 \cdot \square}{8 \cdot 7} = \frac{5}{8}$, f) $\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{\square}$, g) $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{20}{\square}$, h) $\frac{7}{10} = \frac{\square \cdot 3}{10 \cdot 3}$

17 Vypočítajte $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{9}{27}$ zo 450 €.

18 Vysvetlite, prečo sú všetky tri výsledky v úlohe 17 rovnaké.

19 Ktorý zlomok sme rozširovali, ak výsledok rozširovania je zlomok a) $\frac{6}{15}$, b) $\frac{32}{64}$, c) $\frac{63}{72}$? Ak existuje viac možností, nájdite ich.

Aj vy ste pri riešení úlohy 19 delili čitateľa aj menovateľa tým istým číslom? Všimli ste si, že keď: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$, *potom aj* $\frac{6}{15} = \frac{6 : 3}{15 : 3} = \frac{2}{5}$?

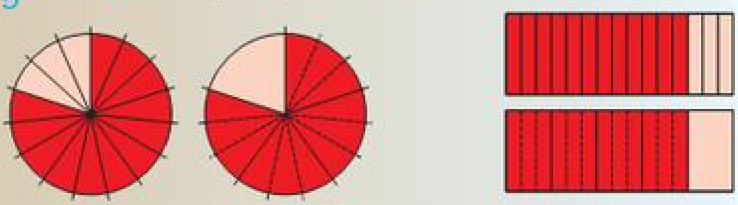
! Ak v zlomku vydelíme čitateľa aj menovateľa tým istým číslom (iným ako 0), hodnota zlomku sa nezmení. Takúto úpravu zlomku voláme **krátenie zlomku** a niekedy aj **zjednodušovanie zlomku**. Krátiť môžeme iba takým číslom, ktorým možno čitateľa aj menovateľa vydeliť bezo zvyšku.

20 Vykráťte zlomok $\frac{12}{15}$ tromi.

Postupovali ste ako Peter?

Peter:
Krátiť zlomok znamená vydeliť čitateľa aj menovateľa rovnakým číslom, preto pri krátení zlomku $\frac{12}{15}$ číslom 3 budem postupovať takto:

$$\frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}.$$



! Krát označuje násobenie, ale **vykrátiť znamená vydeliť** čitateľa aj menovateľa tým istým číslom. Je to odvodené od slova skrátiť = zmenšiť.

21 Vykráťte zlomky číslom v zátvorke.

a) $\frac{6}{8}$(2), b) $\frac{12}{16}$(4), c) $\frac{20}{30}$(10), d) $\frac{32}{16}$(8), e) $\frac{64}{96}$(16), f) $\frac{25}{35}$(5)

22 Doplňte chýbajúceho čitateľa alebo menovateľa v zlomkoch.

a) $\frac{2}{6} = \frac{\square}{3}$, b) $\frac{18}{27} = \frac{\square}{3}$, c) $\frac{77}{33} = \frac{\square}{3}$, d) $\frac{14}{10} = \frac{7}{\square}$, e) $\frac{32}{60} = \frac{16}{\square}$, f) $\frac{32}{60} = \frac{8}{\square}$,

g) $\frac{40}{60} = \frac{\square}{12}$, h) $\frac{28}{32} = \frac{\square}{16}$, i) $\frac{30}{45} = \frac{\square}{15}$, j) $\frac{27}{81} = \frac{9}{\square}$, k) $\frac{27}{81} = \frac{3}{\square}$, l) $\frac{27}{81} = \frac{1}{\square}$

V častiach j), k) a l) v úlohe 22 ste videli, že jeden zlomok sa niekedy dá vykrátiť viacerými číslami, pričom aj v čitateli, aj v menovateli ostane prirodzené číslo.

23 Vykráťte zlomky **čo najväčším** číslom tak, aby po vykrátení bolo v čitateli aj v menovateli prirodzené číslo.

a) $\frac{24}{44}$ b) $\frac{48}{18}$ c) $\frac{30}{144}$ d) $\frac{50}{75}$ e) $\frac{62}{49}$

Petrovi pri riešení časti e) úlohy 23 vyšlo, že zlomok $\frac{62}{49}$ sa dá vykrátiť iba číslom 1 (pri delení inými číslami sa buď 62 alebo 49 nedá vydeliť bezo zvyšku). Pri krátení číslom 1 sa zlomok nezmení. Takže taký zlomok sa vlastne nedá vykrátiť.

! Ak sa zlomok nedá vykrátiť (dá sa vykrátiť iba číslom 1), hovoríme, že **zlomok je v základnom tvare**.

24 Ktoré zo zlomkov sú v základnom tvare?

$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{13}{39}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{14}{35}$ $\frac{27}{63}$ $\frac{18}{25}$ $\frac{31}{21}$

25 Zlomky z úlohy 24, ktoré neboli v základnom tvare, upravte na základný tvar.

Pozrite, ako pri úprave zlomku $\frac{27}{63}$ postupovali Filip a Hana.

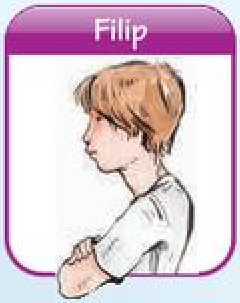
Filip:

Všimol som si, že zlomok sa dá vykrátiť číslom 3:

$\frac{27}{63} = \frac{27:3}{63:3} = \frac{9}{21}$. Zlomok $\frac{9}{21}$, ktorý mi vyšiel, ešte nie je v základnom tvare.

Dá sa ešte raz krátiť číslom 3:

$\frac{9}{21} = \frac{9:3}{21:3} = \frac{3}{7}$. Tento zlomok už je v základnom tvare.



Hana:
Ja to mám inak. Krátila som číslom 9:

$$\frac{27}{63} = \frac{27:9}{63:9} = \frac{3}{7}.$$

Filip:
Výsledok máme rovnaký, obaja to máme správne.
Je predsa jedno, či krátiš číslom 3 a potom ešte raz číslom 3, alebo hneď krátiš číslom 9.

26 Kráťte zlomok $\frac{48}{72}$ a) najskôr číslom 2 a výsledok číslom 3, b) najskôr číslom 3 a výsledok číslom 2, c) číslom 6.

27 Upravte zlomok $\frac{48}{72}$ z úlohy 26 do základného tvaru. Ako ste postupovali?

28 V autobuse je 40 miest na sedenie. Piati cestujúci stáli, pätnásti sedeli.
a) Aká časť cestujúcich stála?
b) Aká časť cestujúcich sedela?
c) Aká časť miest na sedenie bola obsadená?
Všetky výsledky uveďte v základnom tvare.

Otec sa pýta Jurka:
„Čo sa učíte na matematike?“
Jurko:
„Hľadáme spoločného menovateľa.“
Otec:
„Toho sme hľadali aj my pred tridsiatimi rokmi. Ešte stále sa nenašiel?“

29 Skúste rozšírením upraviť zlomky $\frac{5}{12}$ a $\frac{8}{15}$ tak, aby po úprave mali rovnakého menovateľa.

Pozrite, ako postupovala Viera.

Viera:
Ja som oba menovatele (12 a 15) postupne násobila číslami 1, 2, 3, 4... až som našla rovnaké.

12 → 12; 24; 36; 48; 60
15 → 15; 30; 45; 60

Vyšlo mi 60. Musím teda oba zlomky upraviť tak, aby mali menovatele 60. To je ľahké:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60} \text{ a } \frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{32}{60}.$$

! Úprava zlomkov tak, aby mali rovnaké menovatele, sa volá úprava na rovnakého menovateľa, niekedy aj úprava na spoločného menovateľa.

30 Podobne ako Viera upravte na rovnaké menovatele zlomky:

a) $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{8}; \frac{5}{12}$ c) $\frac{12}{9}; \frac{4}{15}$ d) $\frac{11}{20}; \frac{13}{8}$

Peter:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 15}{12 \cdot 15} = \frac{75}{180} \text{ a } \frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 12}{15 \cdot 12} = \frac{96}{180}.$$

31 Opíšte na príklade zlomkov $\frac{7}{9}$ a $\frac{5}{20}$ spolužiakovi/spolužiačke, ako upravuje zlomky na spoločného menovateľa Peter.

32 Vyskúšajte si Petrov spôsob a upravte ešte raz na rovnaké menovatele zlomky z úlohy 30.

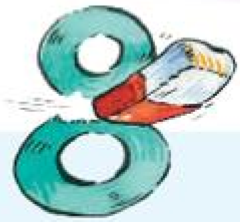
Vtáčia búdka 2

Na obrázku, ktorý narysovala Anička, je znázornená vtáčia búdka pre sýkorku uhliarku. Búdka je zložená z dosiek rovnakej hrúbky, pričom štyri dosky tvoriace bočné steny sú rovnaké a zvyšné dve (spodná a vrchná doska) sú tiež rovnaké. Na obrázku nie je znázornená vrchná doska. Skutočná búdka má všetky rozmery 4-krát väčšie, ako sú na obrázku.

Úloha 1: Zistite, aké rozmery majú dosky, z ktorých je zhotovená táto búdka.

Úloha 2: Aničkin otec získal štyri rovnaké diely tvoriace bočné steny búdky z jedinej dosky hrubej 20 mm, ktorú rozpílil na štyri časti. Jeden rez pílkou má šírku 2 mm. „Je to neuveriteľná náhoda," povedal otec Aničke, „tá veľká doska mala presne také rozmery, aké som potreboval. Stačila práve na štyri bočné steny. Keď som ju rozpílil, nevznikol nijaký odpad." Zistite rozmery dosky, z ktorej Aničkin otec napílil štyri bočné steny búdky. Nájdete viac riešení?

Porovnávanie zlomkov



Podobne, ako sme porovnávali čísla, môžeme porovnávať aj zlomky.

Rozdeľte sa do 3- až 4-členných skupín. Skúste v nich spoločne riešiť nasledujúce úlohy.

1 Zistite, ktorý zlomok je na číselnej osi ďalej od nuly (teda ktorý zlomok je väčší).

a) $\frac{5}{8}; \frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{12}; \frac{4}{12}$ c) $\frac{2}{15}; \frac{7}{15}$ d) $\frac{19}{3}; \frac{11}{3}$

Všimnite si, že dva zlomky, ktoré sme porovnávali, mali rovnakého menovateľa.

2 Navrhnite pravidlo, ako porovnávať dva zlomky s rovnakými menovateľmi.

3 Zistite, ktorý zlomok je väčší (teda ktorý zlomok je na číselnej osi ďalej od nuly).

a) $\frac{8}{5}; \frac{8}{3}$ b) $\frac{3}{4}; \frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{6}; \frac{7}{12}$ d) $\frac{11}{4}; \frac{11}{3}$

4 Navrhnite pravidlo, ako porovnávať dva zlomky s rovnakými čitateľmi.

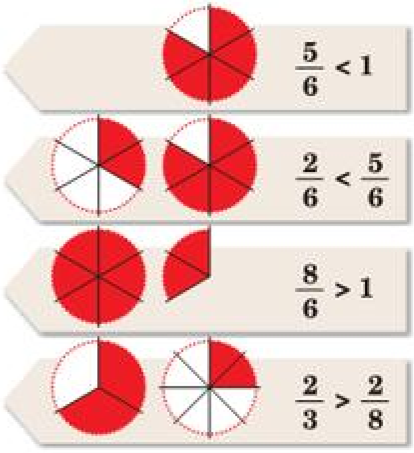
5 Ktoré zo zlomkov $\frac{3}{2}; \frac{7}{8}; \frac{12}{14}; \frac{9}{5}; \frac{1}{4}; \frac{4}{7}; \frac{21}{15}$ sú väčšie ako 1 a ktoré sú menšie ako 1?

6 Navrhnite spôsob, ako zistíme, či je zlomok väčší, alebo menší ako 1.

7 Porovnajte vaše objavy s objavmi ostatných skupín.

8 Doplňte ústne vety.

- Zlomok je menší ako 1 práve vtedy, keď jeho čitateľ je .... ako menovateľ.
- Ak mám zlomky s rovnakými menovateľmi, väčší je ten, ktorý má .... čitateľa.
- Zlomok je väčší ako 1 práve vtedy, keď jeho čitateľ je .... ako menovateľ.
- Ak mám zlomky s rovnakými čitateľmi, väčší je ten, ktorý má .... menovateľa.



9 Ktorý zlomok je väčší?

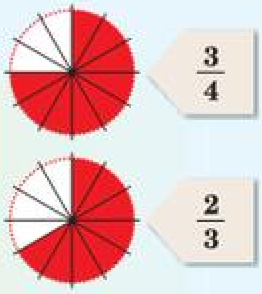
a) $\frac{7}{9}; \frac{7}{10}$ b) $\frac{6}{3}; \frac{6}{2}$ c) $\frac{7}{4}; \frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{7}; \frac{4}{5}$ e) $\frac{3}{13}; \frac{2}{13}$ f) $\frac{29}{73}; \frac{31}{73}$

10 Ktoré zo zlomkov v úlohe 9 sú menšie ako 1?

Kedy sa vám dva zlomky ľahšie porovnávajú, keď majú rovnaké čitatele alebo rovnaké menovatele?

11 Porovnajte zlomky $\frac{3}{4}$ a $\frac{2}{3}$. Ktorý je väčší a o koľko?

Pozrite, ako si s touto úlohou poradil Viliam.



Viliam:

Zlomky $\frac{3}{4}$ a $\frac{2}{3}$ porovnám tak, že ich upravím na rovnakého menovateľa. Ten môže byť napríklad 12.

Potom $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ a $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.

Keďže $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$, tak aj $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Zlomok $\frac{9}{12}$ je väčší ako zlomok $\frac{8}{12}$ o $\frac{1}{12}$, preto aj zlomok $\frac{3}{4}$ je o $\frac{1}{12}$ väčší ako zlomok $\frac{2}{3}$.

12 Upravte zlomky na rovnaké menovatele a porovnajte ich. Ktorý zlomok je menší a o koľko?

a) $\frac{4}{5}; \frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{4}; \frac{9}{5}$ c) $\frac{7}{9}; \frac{9}{7}$ d) $\frac{1}{8}; \frac{2}{21}$ e) $\frac{13}{6}; \frac{14}{9}$ f) $\frac{31}{2}; \frac{44}{3}$

13 Dominik porovnáva dva zlomky tzv. krížovým pravidlom.
Pozrite sa na obrázok a vysvetlite, ako krížové pravidlo funguje.

Dominik:

$\frac{10}{12}$??? $\frac{14}{18}$ → $10 \cdot 18$??? $12 \cdot 14$ → 180 ??? 168

Keďže $180 > 168$, tak aj $\frac{10}{12} > \frac{14}{18}$.

14 Porovnajte krížovým pravidlom dvojice zlomkov z úlohy 12.

15 Jano má $\frac{7}{10}$ kg jabĺk, Milan $\frac{3}{4}$ kg jabĺk. Kto má väčšie množstvo jabĺk?

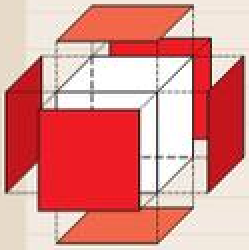
16 Soňa bola hladná a premýšľala, či si má dať 2/3 pizze, alebo 3/4 pizze. Čo jej poradíte? Ktorá časť pizze je väčšia? Úlohu vyriešte úpravou na rovnakého menovateľa aj pomocou obrázka.

KOCKY A KVÁDRE II 6

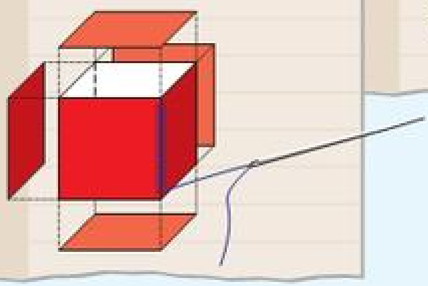
Skladáme kocku

Predstavte si, že by sme chceli celú kocku obliecť tak, aby každý videl, že to je oblečená kocka a nie niečo iné.

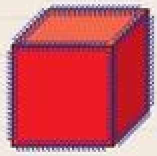
1 Potrebujeme na to 6 štvorcov, ktoré sú presne rovnako veľké, ako sú steny kocky.



2 Teraz stačí 12-krát zošívať.



3 Kocku máme oblečenú.



1 Odkiaľ vieme, že zošívať treba 12-krát?

Ako ju však teraz vyzlečieme, keď sme všetko pozašívali? Bude lepšie, keď niektoré zošívania nahradíme zipsami. Napríklad takto:

4

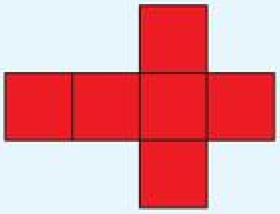
2 Navrhnite také 3 zipsy, pri ktorých sa kocka **ne**bude dať vyzliecť.

Takéto šaty sa však zle uskladňujú, lebo sa ľahko pokrčia. Preto pridáme ešte 4 zipsy, aby sa šaty dali vystrieť.

5

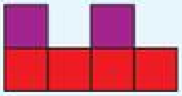
Teraz vidíme, že keby sme na začiatku mohli celé šaty vystrihnúť ako jeden kus, ušetrili by sme zošívanie na piatich miestach. Tieto miesta sme vyznačili zeleným krúžkom.

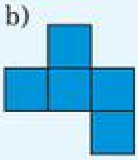
Konečne máme šaty, ako sa patrí. Sú z jedného kusa a dajú sa vystrieť. Vidíme, že sa skladajú zo šiestich rovnakých štvorcov.
*Takéto šaty budeme volať **sieť kocky**:*

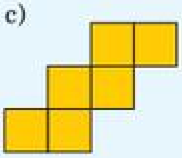


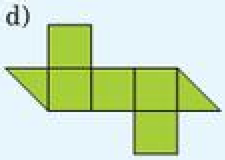
3 Vymyslite a nakreslite jedny iné šaty – inú sieť kocky.

4 Ktoré šaty sú sieťami kocky?

a)


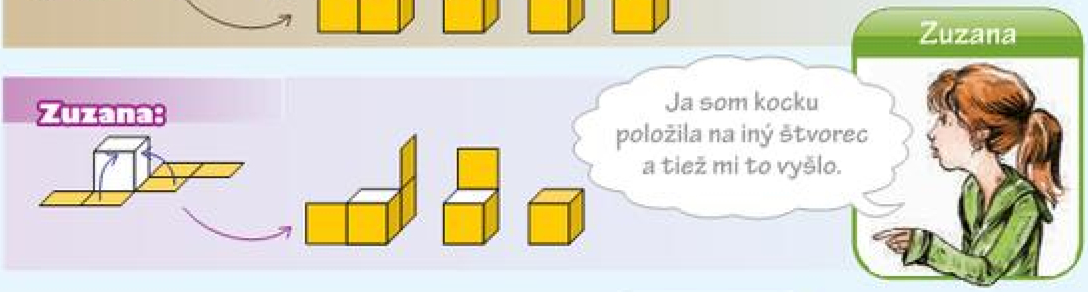
b)


c)


d)


Ľahko vidíme, že modré šaty nie sú dobré, lebo sa skladajú len z piatich štvorcov. Do zelených šiat síce kocku možno obliecť, ale aj tak nám nevyhovujú, pretože chceme, aby sa šaty skladali zo štvorcov – stien kocky.
Ako je to s ostatnými dvoma šatami? Musíme ich vyskúšať.

Začneme žltými šatami.



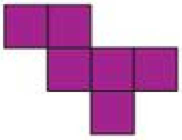
Ako je to s červenofialovými šatami?

5 Kam môžeme premiestniť jeden z fialových štvorcov? Nájdite aspoň dve možnosti.

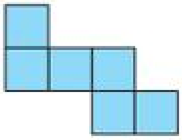
6 Ukážte, že hoci zelené šaty nie sú sieťou kocky, kocka sa do nich dá obliecť. Ak potrebujete, obrázok si prekreslite a pomôžte si nožnicami.

7 Je na obrázku sieť kocky? Úlohu najprv skúste vyriešiť tak, že si obliekanie kocky budete iba v duchu predstavovať. Potom tieto návrhy sietí vyrobte a ich skladaním skontrolujte, či odpoveď, ktorú ste predtým našli, je správna.

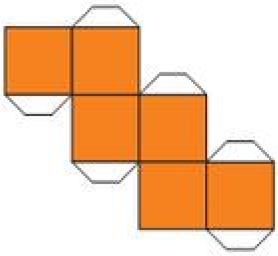
a)



b)

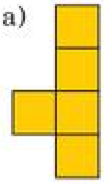


8 Narysujte na tvrdý výkres ľubovoľnú sieť kocky s hranou 6 cm. Vyfarbite ju alebo inak zaujímavo ozdobte. Vystrihnite ju a zlepte z nej kocku. Aby sa vám ľahšie skladala, môžete si pomôcť pomocnými „ušami“ – záložkami, pomocou ktorých budete steny k sebe lepiť. Alebo vám pomôžu malé samolepky? Kto z triedy má najpresnejšiu a najkrajšiu kocku?

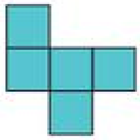


9 Na ktorých miestach môžeme doplniť štvorec, aby sme dostali sieť kocky?

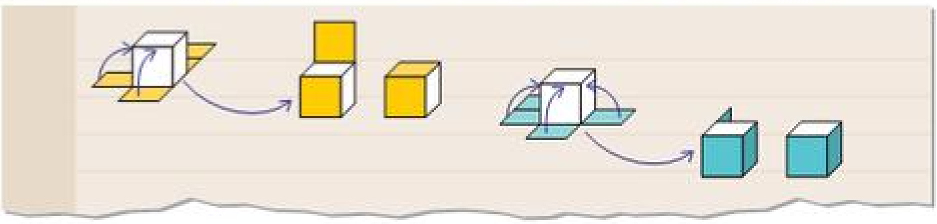
a)



b)



Aj vy ste, podobne ako Karol, našli vždy všetky 4 riešenia naraz? Karol si predstavil, ako tieto nedokončené šaty kocke oblieka. Jeho predstava je na obrázku.

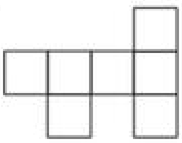


Hneď videl všetky štyri miesta, kde sa dá pridať zvyšný štvorec.

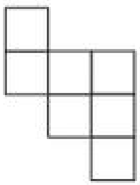
10 Vo všetkých sieťach z riešenia úlohy 3 vyfarbite rovnakou farbou tie štvorce, ktoré po zložení kocky budú ležať oproti sebe.

11 Ktorý štvorec treba škrtnúť, aby vznikla sieť kocky? Nájdite všetky riešenia.

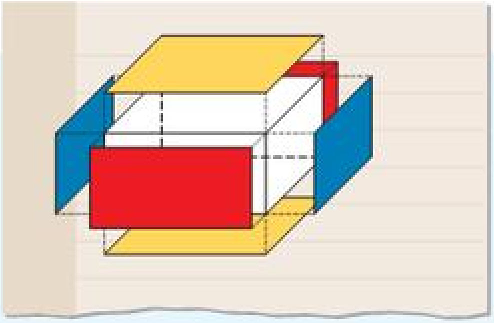
a)



b)



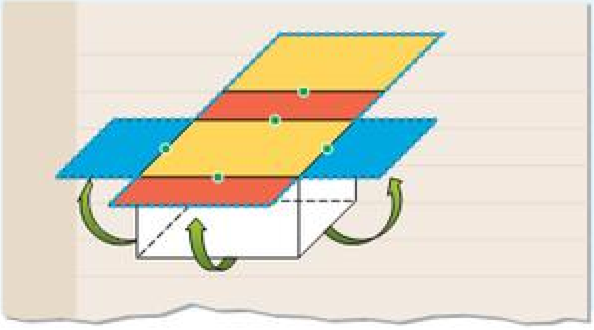
Skladáme kváder



Aj kváder môžeme obliecť do šiat. Šaty pre kváder budeme nazývať ***sieť kvádra****.*

1 Opíšte, z akých útvarov sa skladá sieť kvádra.

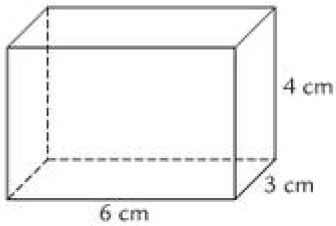
Asi ste odpovedali správne, že sieť kvádra sa skladá zo šiestich obdĺžnikov. Možno ste si všimli aj to, že tie, ktoré sú oproti sebe, sú rovnaké.



2 Aké rozmery majú obdĺžniky, z ktorých sa skladá kváder s rozmermi 6 cm x 4 cm x 3 cm?

Sieť kvádra si môžeme predstaviť podobne ako sieť kocky:

3 a) Narysujte sieť kvádra s rozmermi 6 cm x 4 cm x 3 cm.
b) Vystrihnite ju a zlepením vytvorte tento kváder. (Nezabudnite na záložky, ktoré vám pomôžu pri lepení.)

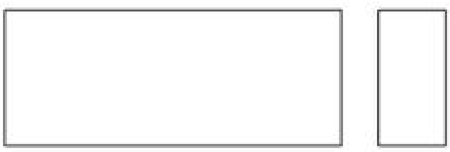


4 Na obrázku vidíte zmenšenú sieť kvádra s rozmermi 6 cm, 4 cm a 3 cm. Načrtnite si túto sieť do zošita a ku každej strane doplňte jej dĺžku.

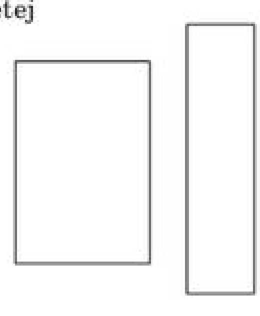
5 Z koľkých štvorcov so stranou 1 cm sa skladá sieť kvádra z úlohy 4?

6 Sieť každého kvádra sa skladá z troch dvojíc obdĺžnikov, pričom obdĺžniky tvoriace dvojicu sú rovnaké – sú to protiľahlé steny kvádra. Na obrázku vidíte dva obdĺžniky, každý z inej dvojice obdĺžnikov tvoriacich sieť kvádra. Odmerajte ich a narysujte do zošita obdĺžnik z tretej dvojice.

a)

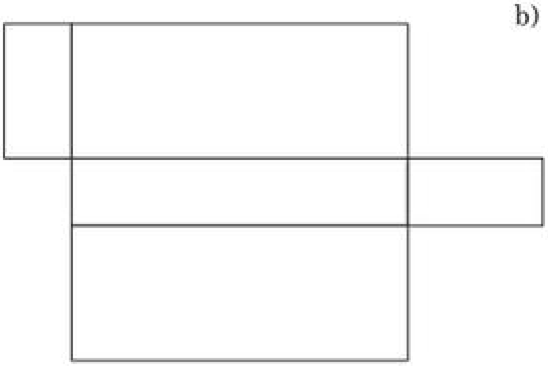


b)

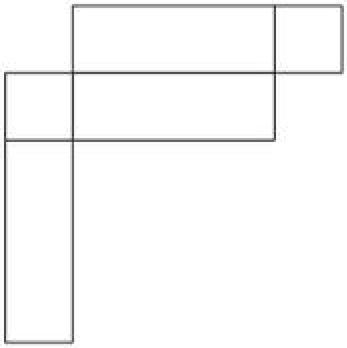


7 Na obrázku vidíte nedokončenú sieť kvádra. Prerysujte ju do zošita a dokončite ju. Nájdete dve rôzne riešenia?

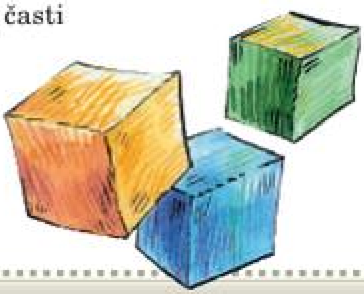
a)



b)



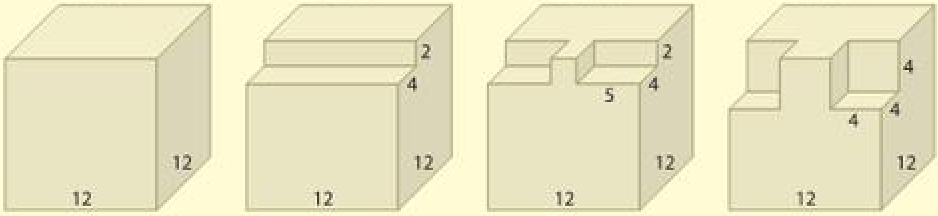
8 Nájdite všetky riešenia úlohy 7. V každej časti sú spolu štyri riešenia.



Jakubove výrobky 2

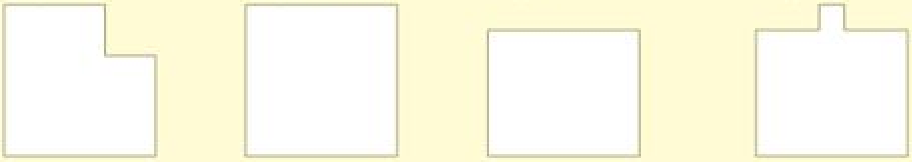
Pamätáte sa na Jakuba, ktorý si z dreva vyrezal štyri rôzne výrobky a postavil ich na policu? Tu sú obrázky Jakubových výrobkov.

Teleso **1** Teleso **2** Teleso **3** Teleso **4**



Keď Jakub po dlhšom čase zodvihol svoje výrobky z police, všimol si, že na polici ostali tieto nezaprášené stopy:

Stopa **1** Stopa **2** Stopa **3** Stopa **4**



Úloha 1: Priraďte každej stope teleso, ktoré ju zanechalo.

Úloha 2: Určte obvody jednotlivých stôp.

Úloha 3: Koľko rôznych stôp môže zanechať teleso 2? Jednotlivé stopy načrtnite a opíšte.

Úloha 4: Postavte dve z daných telies na policu tak, aby po nich zostala rovnaká stopa. Tá stopa však nesmie byť štvorec. Ktoré telesá to sú? Narysujte ich spoločnú stopu.

Hráme sa so sieťami kocky

V predchádzajúcich častiach učebnice sme sa stretli s rôznymi sieťami kocky a kvádra. Pozrime sa na siete kocky podrobnejšie.

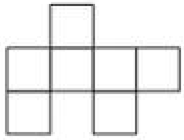
1 Nakreslite všetky rôzne siete kocky, v ktorých sú 4 štvorce položené vedľa seba.

2 Vo všetkých sieťach z úlohy 1 vyfarbite rovnakou farbou štvorce, ktoré po zložení kocky budú ako steny oproti sebe. V každej sieti použite tri rôzne farby.

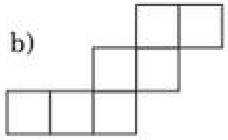
3 Z koľkých štvorcov so stranou 1 cm sa skladá sieť kocky s hranou a) 1 cm, b) 2 cm, c) 5 cm?

4 Ktorý štvorec treba škrtnúť, aby vznikla sieť kocky? Nájdite všetky riešenia.

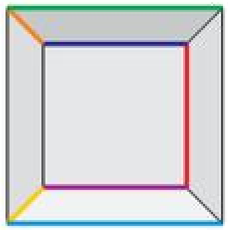
a)



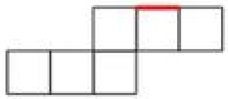
b)



5 Predstavte si, že sedem hrán kocky z papiera, na ktorú sa pozeráme zhora, rozstrihneme. Na obrázku sme tieto hrany vyznačili rozličnými farbami. Nakreslite sieť kocky, ktorú takýmto rozstrihnutím dostaneme. Strany štvorcov siete vyfarbite rovnakou farbou, ako mala príslušná hrana modelu kocky.

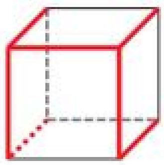


6 Na obrázku je sieť kocky. Vyfarbite rovnakou farbou tie okrajové strany siete, ktoré po zložení „splynú". Jednu stranu sme už vyfarbili.

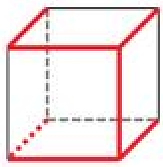


7 Nakreslite sieť kocky, ktorá vznikne, keď model kocky rozstrihneme na vyfarbených miestach.

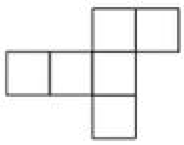
a)



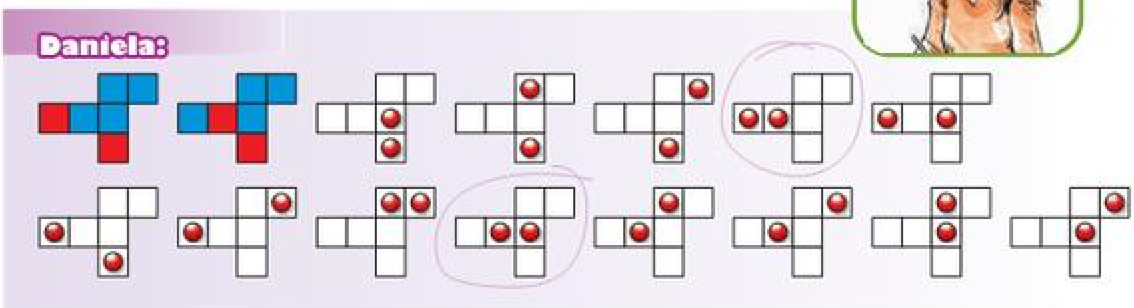
b)



8 Keď štyri štvorce v sieti na obrázku vyfarbíme namodro (nemusia ležať všetky štyri vedľa seba) a zvyšné dva načerveno, dostaneme dvojfarebné šaty. Koľko takýchto rozložených šiat existuje?



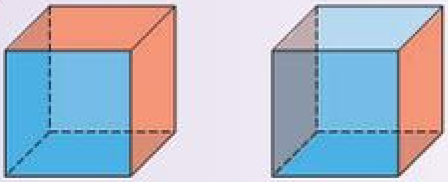
Pozrite, ako úlohu riešila – kreslila a vyfarbovala – Daniela.



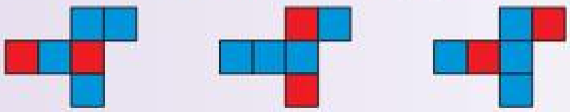
9 Správny počet všetkých možných vyfarbení je 15. Daniela síce uviedla 15 vyfarbení, ale urobila pritom chybu. Stačí však premiestniť jednu červenú guľôčku a jej riešenie bude správne. Ktorú guľôčku treba premiestniť a kam?

10 Medzi šatami z úlohy 8 sú aj také, ktoré sa medzi sebou líšia, keď sú rozložené, ale po oblečení kocka vyzerá rovnako v jedných aj v druhých. Také sú napríklad šaty, ktoré sú na obrázku zakrúžkované.
Rozdeľte šaty do skupín tak, aby šaty v tej istej skupine dávali to isté oblečenie. Koľko rôznych oblečení takto môžeme dostať?

Daniela:
Mne sa nechce „skúšať" jednotlivé šaty a porovnávať oblečenia. Radšej si predstavím kocku už oblečenú. Tam môžu byť červené štvorce buď oproti sebe, alebo vedľa seba. Sú teda len dve rôzne oblečenia.



Oproti sebe sú červené steny len v troch prípadoch.



Zvyšných 12 šiat teda musí viesť k druhému typu oblečenia.

11 Keď vyfarbíme 3 štvorce v sieti kocky na obrázku načerveno a zvyšné 3 namodro, dostaneme dvojfarebné šaty. Rozdeľte šaty do skupín tak, aby šaty v tej istej skupine dávali to isté oblečenie. Koľko rôznych oblečení takto môžeme dostať?

12 Nájdite všetky rôzne siete kocky. V tejto učebnici (v predošlých zadaniach a riešeniach) sú všetky siete znázornené.

Vtáčia búdka 3

Pripomeňte si zadanie rubriky *Vtáčia búdka 2,* ktoré je na strane 10.
Peter si pripravil rovnaké štyri bočné dosky, ako má Aničkina búdka. Zložil ich však iným spôsobom. Preto zvyšné dva kúsky – vrchná a spodná doska – museli mať iné rozmery, ako boli rozmery spodnej a vrchnej dosky Aničkinej búdky.

Úloha 1: Aké rozmery v centimetroch budú mať zvyšné dva kúsky, ktoré bude Peter potrebovať?

Úloha 2: Narysujte Petrovu búdku bez vrchnej časti tak, ako je znázornená Aničkina búdka.

7 KOMBINATORIKA II

Keď máme viac podmienok

Často sa stane, že zo všetkých možností, ktoré máme na výber, nie sú všetky použiteľné, možné či realizovateľné. Napríklad vo futbalovej lige nie všetky futbalové kluby sú vždy k dispozícii na ligové zápasy, nie všetky deti môžu ísť do obchodu (niektoré sú malé a neunesú nákup)...

1 Z ôsmich detí treba vybrať dve, ktoré pôjdu do obchodu po minerálku. Vie sa, že Petra pôjde jedine s Ondrejom a ak pôjde Mária, nepôjde Karol. Koľko možností dvojíc detí, ktoré môžu ísť do obchodu, máme na výber?

Pozrite sa, ako túto úlohu riešili Tomáš, Hana a Róbert.

Tu je Tomášovo vypisovanie:

Petra, Karol, Ondrej, Mária, A, B, C, D
Petra: PO
Karol: KA, KB, KC, KD, KO

AB, AC, AD, AM, AO, BC,
BD, BM, BO, CD, CM, CO,
DM, DO, MO

2 Vysvetlite Tomášov postup.

3 Z ôsmich detí treba vybrať dve, ktoré pôjdu urobiť reportáž na výstave. Vie sa, že z trojice Petra, Ondrej a Mária pôjde nanajvýš jeden. Použite Tomášov postup a zistite, koľko možností máme na výber.

Róbert si pri riešení prvej úlohy pomohol štvorčekovým papierom:

4 Vysvetlite Róbertov postup.

5 Z ôsmich detí, medzi ktorými je päť dievčat, treba vybrať dve deti, ktoré pôjdu na debatnú súťaž. Vie sa, že vo vybranej dvojici môže byť najviac jedno dievča. Použite Róbertov postup a zistite, koľko možností máme na výber.

Vráťme sa k úlohe 1. Hana si pri jej riešení pomohla číslami.

6 Vysvetlite Hanin postup.

7 Z ôsmich detí, medzi ktorými je päť dievčat, treba vybrať dve deti, ktoré budú zastupovať triedu v žiackom parlamente. Vie sa, že Petra aj Mária budú so svojím výberom súhlasiť len vtedy, keď druhý vybraný bude chlapec. Použite Hanin postup a zistite, koľko možností máme na výber.

Nasledujúce úlohy riešte spôsobom, ktorý vám najviac vyhovuje.

8 Z deviatich detí, medzi ktorými sú Petra, Ondrej, Andrej, Mária, Karol a Juraj, treba vybrať dve, ktoré pôjdu do knižnice po nové knihy. Vie sa, že Petra pôjde jedine s Ondrejom alebo Andrejom a ak pôjde Mária, nepôjde Karol ani Juraj. Koľko možností máme na výber?

9 Konrád mal na vstup k mailom heslo **petricka**, lebo jeho kamarátka sa volá Petra. Po čase si uvedomil, že veľa ľudí vie, že Petru volá Petrička. Keby sa chcel niekto dostať do jeho počítača, mohol by jeho heslo ľahko uhádnuť. Preto sa rozhodol, že heslo zmení: vymení v ňom dve písmená medzi sebou, no nie susedné. Koľko možností má na výber?

10 Osem dievčat zo 7. triedy si ide zahrať volejbal proti ôsmačkám. Na ihrisku môže byť naraz šesť hráčok jedného družstva. Koľko úvodných zostáv má trénerka siedmačiek na výber, ak vie, že nie je dobré, aby Táňa a Eva boli na ihrisku naraz?

11 Vymyslite v skupinách podobnú vlastnú úlohu s podmienkami tak, aby počet všetkých možností bol najviac 20. Podarí sa vám vyriešiť všetky úlohy, ktoré vymysleli ostatné skupiny? Porovnajte si svoje riešenie navzájom. Vypisovali ste možnosti všetci rovnako?

Preklápanie 1

Asi viete, že na hracích kockách je súčet počtu bodiek na protiľahlých stenách vždy 7. Na jednej dvojici protiľahlých stien sú čísla 1 a 6, na druhej čísla 2 a 5 a na tretej 3 a 4.

Ľavú kocku na obrázku sme začali preklápať smerom k sebe. Teda po prvom preklopení bude päť bodiek dole a šesť bodiek uvidíme vpredu. Aj naďalej preklápame k sebe.

Úloha 1: Koľko bodiek bude na hornej stene tejto hracej kocky:
a) po 2. preklopení;
b) po 3. preklopení;
c) po 8. preklopení?

Úloha 2: Koľko bodiek bude vidieť vpredu:
a) po 100. preklopení;
b) po 150. preklopení;
c) po 999. preklopení?

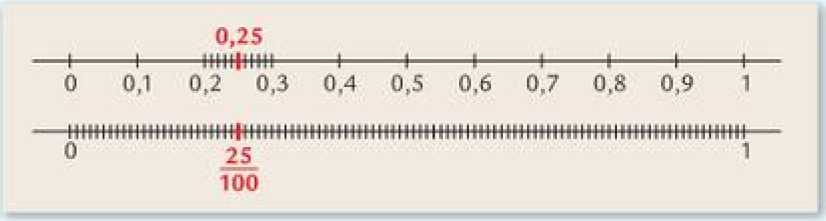
Svoje odpovede vysvetlite.

Desatinné čísla a zlomky

Už vieme, že zlomkom vyjadrujeme časť nejakého celku. Vieme tiež, že zlomok môžeme chápať ako číslo. Pozrime sa na vzťah zlomkov ako čísel a desatinných čísel.

1 Tomáš a Božena mali v škole napísať číslo dvadsaťpäť stotín. Kto z nich to má dobre? Svoju odpoveď vysvetlite.

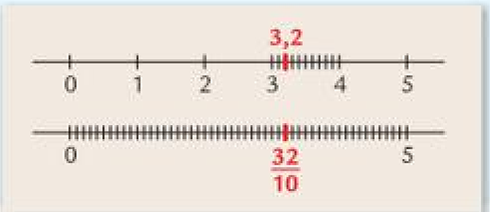
Obe čísla sa prečítajú rovnako: dvadsaťpäť stotín. (V prípade čísla 0,25 sa slovné spojenie nula celých nemusí hovoriť.)
Znázornime si tieto čísla na číselnú os.



Na číselnej osi sú obe čísla na rovnakom mieste, a preto sú rovnaké. Obaja to majú dobre.
Všimnite si aj, že $\frac{25}{100} = 25 : 100 = 0{,}25$. *Zlomok je teda naznačené delenie.*

2 Desatinné čísla 0,26; 0,8; 0,287; 0,045; 0,007; 0,005 007; 3,47 napíšte ako zlomky.

3 Vysvetlite, prečo sa $3{,}2 = \frac{32}{10}$. Pomôžte si znázornením na číselnej osi.



! Každé desatinné číslo sa dá upraviť na zlomok.

4 Podľa toho, ako sa zlomky prečítajú, ich zapíšte ako desatinné čísla.

a) $\frac{2}{10}$ b) $\frac{31}{100}$ c) $\frac{38}{1\,000}$ d) $\frac{17}{10\,000}$

5 Napíšte v tvare zlomku čísla 7; 0,06; 60,7; 43,592; 3,400 0.

6 Vypočítajte. Pomôžte si prevodom na desatinné čísla.
Výsledok napíšte v tvare zlomku.

a) $\frac{4}{10} - \frac{35}{1\,000}$ b) $\frac{7}{100} + \frac{35}{10}$ c) $\frac{75}{1\,000} \cdot \frac{8}{100}$ d) $\frac{7}{10} : \frac{35}{100}$

7 Pokúste sa upraviť na desatinné číslo zlomok $\frac{3}{4}$.

Pozrite sa, ako to riešili Edita a Paula.

Edita:
Aby som $\frac{3}{4}$ mohla zmeniť na desatinné číslo, bolo by dobré, keby sa mi podarilo upraviť tento zlomok na tvar, kde bude menovateľ niektoré z čísel 10, 100, 1 000, 10 000...
Mne sa to podarilo pre číslo 100, lebo 100 = 4 · 25.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Paula:
Ja využijem to, že zlomok je naznačené delenie a budem deliť.

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$$

3,00 : 4 = 0,75
30
 20

8 Upravte na desatinné číslo zlomok a) $\frac{3}{40}$, b) $\frac{13}{5}$, c) $\frac{37}{2\,000}$, d) $\frac{573}{8}$, e) $\frac{43}{625}$, f) $\frac{522}{45}$.
Môžete použiť kalkulačku.

9 Všimnime si časť f) úlohy 8. Milan sa snažil číslo $\frac{522}{45}$ zapísať ako Edita, ale číslo 45 sa mu nedarilo upraviť násobením na niektoré z čísel 10, 100, 1 000, 10 000... Pauliným postupom bez problémov dostal výsledok 11,6. Čo si myslíte, ako si s číslom $\frac{522}{45}$ poradila Edita?

10 Pri väčších číslach si pomôžeme kalkulačkou. Pomocou kalkulačky upravte na desatinné číslo zlomok:

a) $\frac{37}{148}$, b) $\frac{25\,069}{583}$, c) $\frac{583}{212}$, d) $\frac{833}{136}$, e) $\frac{403}{3\,125}$, f) $\frac{522}{225}$, g) $\frac{97}{44}$.

Ako sa vám darilo pri riešení časti g) úlohy 10?

Karol:
Mne sa na kalkulačke zobrazilo

2,204545455

Soňa:
Mne zasa 2,2045454545454545454545455

11 Čo sa zobrazilo vám? Ktorý z týchto výsledkov je správny?

Skôr, ako budeme diskutovať o výsledkoch Karola a Sone, pokúsme sa spolu s Karolom úlohu vyriešiť písomným delením:

Karol:
Ja to skúsim vydeliť písomne na papieri a uvidíme, kto má pravdu:

```
97,00000000000000000000000000 : 44 = 2,20454545
 90
   200
    240
     200
      240
       200
        240
         200
          240
           200
```

Soňa:
Karol, to si nemusel toľko deliť. Veď je jasné, že dvojica 45 sa tam bude stále opakovať a nikdy sa to neskončí.

12 Má Soňa pravdu? Z čoho to asi vypozorovala? Všímajte si zvyšky pri delení.

Karol:
Keď sa to delenie nikdy neskončí, znamená to, že zlomok $\frac{97}{44}$ sa nedá upraviť na desatinné číslo.

Soňa:

Máš pravdu. Minulý rok sme sa učili o periodických číslach. Spomínaš si? Tá opakujúca sa skupina cifier sa volá perióda a zapisuje sa tak, že nad opakujúcu sa skupinu dáme čiarku:

$$\frac{97}{44} = 2{,}2045454545... = 2{,}20\overline{45}$$

13 Určte periódy a zapíšte pomocou nich zlomky. Úlohu počítajte bez kalkulačky a výsledky si overte na kalkulačke.

a) $\frac{7}{90}$, b) $\frac{64}{55}$, c) $\frac{12}{37}$, d) $\frac{56\,823}{101}$, e) $\frac{9}{410}$, f) $\frac{43\,803}{63}$.

14 Experimentujte na kalkulačke a určte, aký zlomok je číslo a) $0{,}\overline{7}$, b) $0{,}0\overline{7}$, c) $0{,}2\overline{7}$, d) $0{,}\overline{27}$.

! Zlomky voláme aj racionálne čísla. Desatinné čísla sú také čísla, ktoré sa dajú zapísať zlomkom, ktorý má v menovateli niektoré z čísel 10, 100, 1 000, 10 000... Každé desatinné číslo môžeme napísať ako zlomok, ale nie každý zlomok vieme napísať ako desatinné číslo (napr. $\frac{1}{3}$ nevieme zapísať ako desatinné číslo).

15 V ktorej časti budú čísla $\frac{7}{56}$ a $\frac{8}{56}$?

Preklápanie 2

Pripomeňte si text rubriky *Preklápanie 1* na str. 22. Teraz budeme ľavú kocku z obrázka striedavo preklápať smerom od seba a smerom doprava. Začneme v polohe, ako je na obrázku vľavo, prvé preklopenie bude smerom od seba (teda po prvom preklopení bude päť bodiek hore a jednu bodku uvidíme vpredu).

Úloha 1: Znázornite túto kocku a) po 2 preklopeniach, b) po 3 preklopeniach.

Úloha 2: Po koľkých preklopeniach sa dostane kocka do rovnakej polohy ako na začiatku preklápania?

Úloha 3: Po koľkých preklopeniach budú vpredu 4 bodky? Svoju odpoveď vysvetlite.

Úloha 4: Znázornite túto kocku po 99 preklopeniach. Zdôvodnite počet bodiek, ktoré má kocka na vašom znázornení vpredu, hore a vpravo.

Sčítanie a odčítanie zlomkov

Už vieme, že zlomky nevyjadrujú len časť celku, ale že sú to aj čísla. Poďme sa pozrieť, ako sa s nimi počíta.

Rovnaké menovatele

Začneme sčítaním a odčítaním zlomkov s rovnakými menovateľmi.

1 Vypočítajte a) päť devätín plus dve devätiny, b) päť devätín mínus dve devätiny,

c) $\boxed{\frac{5}{9}+\frac{2}{9}}$, d) $\boxed{\frac{5}{9}-\frac{2}{9}}$.

*Aj vám sa zdajú príklady a) a b) ľahké? Veď 5 + 2 = **7** a 5 – 2 = **3**, preto sú odpovede v časti a) **7** devätín a v časti b) **3** devätiny.*

Rudo:
Potom aj prípady c) a d) sú ľahké, lebo je to vlastne to isté, len je to napísané v zlomkoch.

$\boxed{\frac{5}{9}+\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{5+2}{9}} = \boxed{\frac{7}{9}}$ $\boxed{\frac{5}{9}-\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{5-2}{9}} = \boxed{\frac{3}{9}}$

$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9}$ $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}$

2 Vypočítajte.

a) $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$ b) $\frac{7}{11}-\frac{4}{11}$

c) $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}$ d) $\frac{3}{37}-\frac{2}{37}$

! Zlomky s rovnakým menovateľom odčítame tak, že odčítame čitatele a menovateľa odpíšeme.

3 Doplňte ústne vetu:

- Zlomky s rovnakým menovateľom sčítame tak, že .... čitatele a menovateľa ....

4 Vypočítajte.

a) $\frac{2}{9}+\frac{11}{9}-\frac{5}{9}$ b) $\frac{11}{14}-\frac{9}{14}+\frac{3}{14}$ c) $\frac{1}{17}+\frac{2}{17}+\frac{3}{17}-\frac{4}{17}$

5 Na oslave narodenín nakrájal Samo koláč na dvanástiny. Otec zjedol $\frac{2}{12}$ koláča, mama $\frac{3}{12}$ koláča a Samo toľko, koľko otec. Akú časť koláča zjedli spolu? Aká časť koláča ostala?

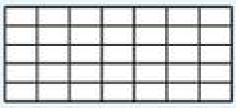
6 Vráťme sa k predchádzajúcej úlohe. Ako by to dopadlo, keby otec zjedol $\frac{1}{4}$ koláča, mama nič a Samo $\frac{5}{12}$ koláča?

Rôzne menovatele

Ako sa budú sčitovať a odčitovať zlomky, ktoré nemajú rovnaké menovatele?

Zoberme si napríklad pätiny a sedminy, konkrétne zlomky $\frac{3}{5}$ a $\frac{2}{7}$.

Pomôžeme si rozdeľovaním koláča aj na pätiny, aj na sedminy, koláč na obrázku je rozdelený aj na pätiny – riadky, aj na sedminy – stĺpce.



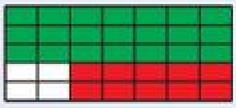
1 Graficky a) sčítajte, b) odčítajte $\frac{3}{5}$ obdĺžnika a $\frac{2}{7}$ obdĺžnika.

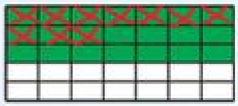
Pozrite sa, ako túto úlohu riešila Zlatica.

Zlatica:

Začnem tromi pätinami. Pätiny sú riadky, tri riadky si vyznačím zelenou farbou. Sedminy sú stĺpce. Celé stĺpce už nemôžem vyznačiť. Jeden stĺpec sa skladá z piatich malých obdĺžnikov, čiže dva stĺpce sa skladajú z $2 \cdot 5 = 10$ malých obdĺžnikov.

Pri sčítaní teda môžem červenou farbou vyznačiť ľubovoľných 10 malých obdĺžnikov. Pri odčítaní, naopak, škrtnem 10 zelených obdĺžnikov.





Pre sčítanie: Koláč – obdĺžnik – sa skladá z $5 \cdot 7 = 35$ malých obdĺžnikov. Zafarbených je $21 + 10 = 31$ z nich. Preto $\frac{3}{5}$ obdĺžnika plus $\frac{2}{7}$ obdĺžnika sa rovná $\frac{31}{35}$ obdĺžnika.

Pre odčítanie: Zo všetkých $5 \cdot 7 = 35$ malých obdĺžnikov zostalo nevyškrtnutých $21 - 10 = 11$ zelených obdĺžnikov. Preto $\frac{3}{5}$ obdĺžnika mínus $\frac{2}{7}$ obdĺžnika sa rovná $\frac{11}{35}$ obdĺžnika.

2 Graficky vypočítajte: a) $\frac{6}{7} - \frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{8} + \frac{4}{11}$, c) $\frac{4}{9} + \frac{2}{5}$, d) $\frac{7}{9} - \frac{3}{5}$.

Pozrite sa, ako časť c), teda príklad $\frac{4}{9} + \frac{2}{5}$, riešil lenivý Filip:

Filip:

Mne sa kresliť nechce. Ja si to len predstavím. Predstavujem si, že obdĺžnik som rozdelil na 9 stĺpcov – stĺpec bude devätina – a na 5 riadkov – riadok bude pätina. Jeden stĺpec sa skladá z 5 obdĺžnikov. Potrebujem 4 stĺpce, tie sa skladajú zo $4 \cdot 5 = 20$ obdĺžnikov. Jeden riadok sa skladá z 9 obdĺžnikov. Potrebujem 2 riadky, tie sa skladajú z $2 \cdot 9 = 18$ obdĺžnikov. Spolu dostávam $20 + 18 = 38$ obdĺžnikov. Celý obdĺžnik sa skladá z $9 \cdot 5 = 45$ obdĺžnikov, preto jeden obdĺžnik je $\frac{1}{45}$ a 38 obdĺžnikov bude $\frac{38}{45}$.

Keď to napíšem stručne, dostanem $\frac{4}{9} + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 9}{9 \cdot 5} = \frac{38}{45}$.

3 Vyriešte Filipovou metódou tieto úlohy:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$ e) $\frac{4}{7}+\frac{5}{11}$ f) $\frac{4}{7}-\frac{5}{11}$

4 Peter zobral z misy so slivkami $\frac{2}{5}$ všetkých sliviek a Viera $\frac{3}{8}$ všetkých sliviek. Aká časť sliviek po nich zostala v mise?

5 Peter zobral z misy so slivkami $\frac{2}{5}$ sliviek a Viera $\frac{3}{8}$ zo zvyšku sliviek. Aká časť sliviek po nich zostala na mise?

6 Upravte zlomky: a) $\frac{1}{4}$ a $\frac{2}{5}$, b) $\frac{7}{3}$ a $\frac{8}{7}$, c) $\frac{4}{11}$ a $\frac{7}{6}$, d) $\frac{5}{12}$ a $\frac{1}{18}$, e) $\frac{8}{9}$ a $\frac{7}{12}$, f) $\frac{3}{25}$ a $\frac{9}{2}$ na rovnakého menovateľa.

Postupovali ste v časti e) ako Viera?

Viera:

e) $\frac{8}{9}=\frac{8\cdot 12}{9\cdot 12}=\frac{96}{108}$ a $\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 9}{12\cdot 9}=\frac{63}{108}$

Ja som asi ešte lenivejšia ako Filip. Mne sa pri sčítaní a odčítaní nechce ani predstavovať si nejaký rozdelený obdĺžnik. Ja si dané zlomky upravím na rovnakého menovateľa. Potom ich sčítam alebo odčítam ako zlomky s rovnakým menovateľom.

7 Skúste podľa Viery vypočítať: $\frac{8}{9}+\frac{7}{12}$ a $\frac{8}{9}-\frac{7}{12}$

Máte pri odčítaní rovnaký postup ako Viera?

Viera:

$\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=\frac{8\cdot 12}{9\cdot 12}-\frac{7\cdot 9}{12\cdot 9}=\frac{96-63}{108}=\frac{33}{108}$

Tomáš sa vždy snaží počítať s čo najmenšími číslami. Preto sa usiluje zvoliť si čo najmenšieho spoločného menovateľa. Vo Vierinom príklade našiel menovateľa 36: $9\cdot 4=36$, $12\cdot 3=36$

Tomáš:

$\frac{8}{9}=\frac{8\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{32}{36}$ a $\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{21}{36}$, takže

$\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=\frac{32}{36}-\frac{21}{36}=\frac{32-21}{36}=\frac{11}{36}$

8 Ako je možné, že Viera aj Tomáš riešili rovnakú úlohu, ale dostali iné výsledky?

9 Ako by Tomáš riešil príklady: a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$, b) $\frac{7}{9}-\frac{5}{12}$, c) $\frac{1}{6}+\frac{7}{10}+\frac{11}{15}$?

10 Skúste použiť Vierin alebo Tomášov spôsob na príkladoch:

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$, b) $\frac{7}{3}+\frac{8}{7}$, c) $\frac{4}{11}+\frac{7}{6}$, d) $\frac{5}{12}-\frac{1}{18}$, e) $\frac{3}{25}+\frac{9}{2}$.

11 Vypočítajte $\frac{42}{63}+\frac{24}{48}$. Pred výpočtom si zlomky zjednodušte.

Počítali ste ako Tomáš?

Tomáš:

$$\frac{42}{63}+\frac{24}{48}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$$

12 Janka minula v cukrárni s kamarátkami $\frac{1}{2}$ zo svojich úspor, $\frac{1}{3}$ úspor dala za zošity do školy a zostalo jej 7 €. Koľko eur mala Janka usporených?

13 Na konci školského roka išli $\frac{2}{5}$ žiakov jednej triedy na koncoročný výlet, $\frac{1}{3}$ žiakov tejto triedy bola chorá a 8 žiakov bolo na turnaji. Vypočítajte, koľko žiakov má trieda.

14 O koľko je číslo: a) 0,12 menšie ako číslo 0,31, b) $\frac{1}{3}$ menšie ako $\frac{5}{7}$?

15 Vypočítajte.

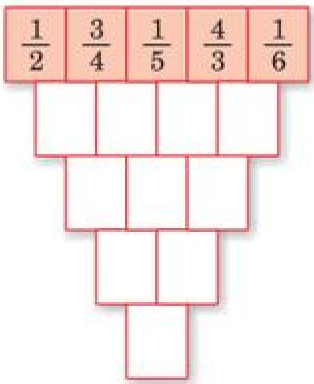
$\frac{7}{14}+\frac{13}{21}$ $\quad\frac{7}{16}+\frac{13}{24}$ $\quad\frac{3}{28}+\frac{14}{21}$ $\quad\frac{11}{32}+\frac{13}{16}$ $\quad\frac{17}{12}+\frac{7}{18}$

$\frac{5}{24}-\frac{7}{36}$ $\quad\frac{3}{22}-\frac{2}{33}$ $\quad\frac{19}{12}-\frac{15}{22}$ $\quad\frac{7}{45}-\frac{4}{27}$ $\quad\frac{9}{34}-\frac{12}{51}$

16 Poradíte si aj s tromi zlomkami?

a) $\frac{7}{14}+\frac{13}{21}+\frac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\frac{3}{28}+\frac{14}{21}-\frac{5}{12}$

17 Prekreslite si do zošita sčítací trojuholník a vyplňte ho. Výsledky uveďte v základnom tvare. Pripomeňme si, že v sčítacom trojuholníku je vždy v políčku pod dvoma číslami zapísaný ich súčet.



Násobenie zlomkov a prirodzených čísel

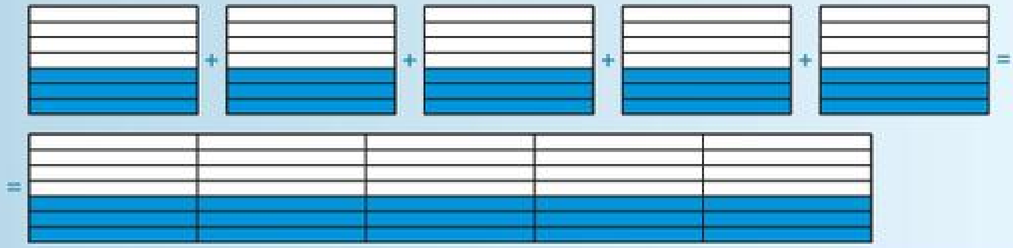
Zlomky sa budú veľmi jednoducho násobiť prirodzeným číslom.

1 Pokúste sa vypočítať $5 \cdot \frac{3}{7}$ a $\frac{3}{7}$ z 5.

Porovnajte svoje riešenie s riešeniami Adama a Evy.

Adam:

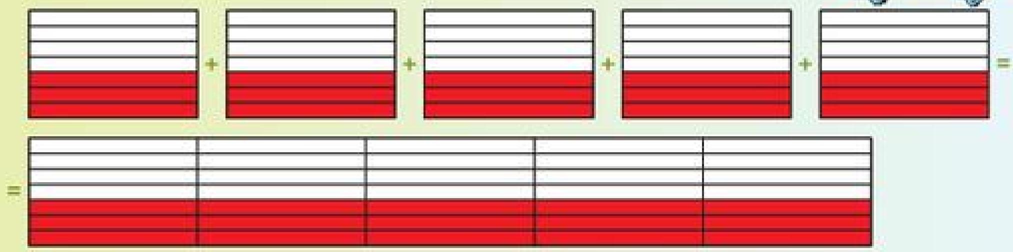
$5 \cdot \frac{3}{7}$ je to isté, ako keď 5-krát sčítam $\frac{3}{7}$:



$$5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{3+3+3+3+3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7}$$

Eva:

$\frac{3}{7}$ z 5 je to isté, ako keď 5-krát sčítam $\frac{3}{7}$ z 1:



Môžem si to predstaviť aj tak, že $\frac{3}{7}$ z 5 koláčov je 5-krát viac ako $\frac{3}{7}$ z 1 koláča.

Dostanem to isté ako Adam.

2 Vynásobte.

a) $3 \cdot \frac{2}{7}$ b) $2 \cdot \frac{4}{9}$ c) $7 \cdot \frac{3}{11}$ d) $6 \cdot \frac{3}{13}$ e) $5 \cdot \frac{5}{6}$

3 Pomocou násobenia vypočítajte a) päť sedmín z dvadsiatich,

b) $\frac{4}{9}$ z 12, c) $\frac{2}{3}$ z 20, d) $\frac{5}{7}$ z 11, e) $\frac{7}{2}$ z 9.

4 Doplňte vetu.

- Zlomok násobíme prirodzeným číslom tak, že čitateľ zlomku .... daným prirodzeným číslom a do menovateľa napíšeme ....

5 Vyskúšajte si tento návod na príkladoch.

a) $\frac{3}{4}\cdot 5$ b) $\frac{2}{3}\cdot 8$ c) $\frac{4}{9}\cdot 6$ d) $\frac{5}{2}\cdot 7$ e) $\frac{11}{4}\cdot 3$

6 Libor nemal v časti c) predchádzajúcej úlohy výsledok $\frac{24}{9}$, ale $\frac{8}{3}$. Má to správne?

Keď si kontrolujete výsledky, ktoré sú v tvare zlomku, váš výsledok nemusí byť na prvý pohľad rovnaký ako výsledok, s ktorým ho kontrolujete. Je to preto, lebo každý zlomok vyjadruje číslo, ktoré vieme zapísať viacerými spôsobmi.

Pozrite sa, ako Libor a Soňa prišli pri riešení časti c) úlohy 5 k výsledku $\frac{8}{3}$.

Libor:

Mne najprv vyšlo $\frac{24}{9}$, ale výsledok som potom zjednodušil krátením.

$$\frac{4}{9}\cdot 6 = \frac{24}{9} = \frac{24:3}{9:3} = \frac{8}{3}$$

Soňa:

Ja som zjednodušovala krátením už na začiatku:

$$\frac{4}{\cancel{9}_{3}}\cdot \cancel{6}^{2} = \frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}$$

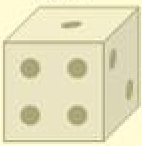
7 Vyskúšajte si oba postupy a vypočítajte príklady.

a) $\frac{2}{15}\cdot 10$ b) $12\cdot\frac{3}{16}$ c) $12\cdot\frac{4}{9}$ d) $6\cdot\frac{5}{8}$ e) $\frac{2}{9}\cdot 18$

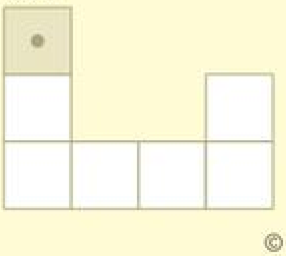
Preklápanie 3

Hraciu kocku, ktorá je na *obrázku 1,* sme začali postupne preklápať. Začali sme smerom k sebe. Po každom preklopení sme zakreslili polohu vrchnej steny kocky a počet bodiek na nej, pozri *obrázok 2.*

obr. 1



obr. 2



Úloha 1: Ktorým smerom sme podľa *obrázka 2* preklápali druhý raz a ktorým smerom tretí raz?

Úloha 2: Dokreslite do všetkých políčok obrázka 2 počty bodiek na vrchnej stene kocky.

Úloha 3: Nakreslite kocku na poslednom mieste preklápania (aj s bodkami).

Násobenie a delenie zlomkov

Viete pracovať podľa návodu? Vyskúšajte si to na návode na násobenie zlomkov a potom aj na návode na delenie zlomkov. Najskôr však vyriešte jednu úlohu.

1 Koláč je rozdelený na šestiny. Janko si zobral a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$ z jednej časti. Akú časť koláča si zobral?

> **!** Dva zlomky násobíme tak, že súčin čitateľov delíme (lomíme) súčinom menovateľov.

2 Vynásobte podľa tohto návodu $\frac{5}{4} \cdot \frac{20}{85}$.

Porovnajte svoje riešenie s Tomášovým výpočtom.

Tomáš:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{20}{85} = \frac{\text{súčin čitateľov}}{\text{súčin menovateľov}} = \frac{5 \cdot 20}{4 \cdot 85} = \frac{100}{340}$$

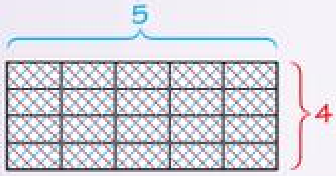
3 Vypočítajte.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4}$ $\frac{13}{10} \cdot \frac{2}{5}$ $\frac{11}{6} \cdot \frac{4}{7}$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7}$

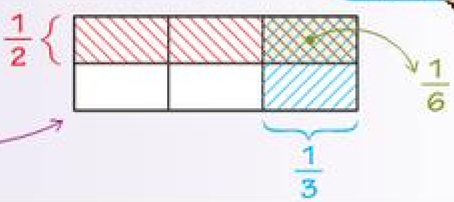
Natália si riešenie príkladu $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ predstavila takto:

Natália:

Násobenie napr. $4 \cdot 5$ si môžem predstaviť ako počet malých obdĺžnikov, ktoré budú vyšrafované, ak vyznačím 4 riadky a 5 stĺpcov:



Násobenie $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ si tiež predstavím pomocou obrázka:



4 Nakreslite podobné obrázky pre príklady: a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$, b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4}$.

5 Upravte výsledky úlohy 3 na základný tvar.

6 Poradíte si aj s väčšími číslami?

$\frac{9}{35} \cdot \frac{42}{27}$ $\frac{12}{63} \cdot \frac{56}{18}$ $\frac{25}{42} \cdot \frac{28}{35}$ $\frac{14}{21} \cdot \frac{24}{16}$ $\frac{49}{60} \cdot \frac{36}{35}$

Na strane 32 sme videli, že Soňa násobenie prirodzeného čísla zlomkom zjednodušovala už na začiatku výpočtu. To isté robí aj pri násobení zlomkov.

Pozrite si jej riešenie príkladu $\frac{11}{6} \cdot \frac{4}{7}$.

Soňa:

$$\frac{11}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{7} = \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{22}{21}$$

7 Vyskúšajte si toto krátenie počas výpočtu a ešte raz vyriešte úlohu 6.

8 Ak si prirodzené čísla napíšete ako zlomok, môžete podľa návodu násobiť aj tieto čísla. Vynásobte vždy dve susedné čísla. Pozor, je to až 7 príkladov.

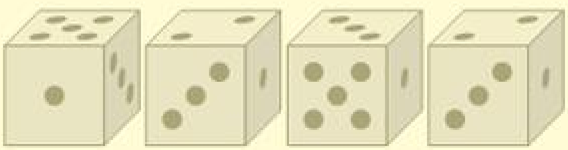
$\frac{9}{7}$; 8; $\frac{11}{48}$; 6; $\frac{13}{24}$; 12; $\frac{5}{36}$; 9

9 Overte, že výsledky úlohy 8 sú rovnaké, akoby ste zlomok násobili prirodzeným číslom tak ako v predchádzajúcej kapitole.

10 Tipujte, čo je prevrátený zlomok k zlomku $\frac{23}{41}$. Skúste všeobecne formulovať, čo je prevrátený zlomok.

Preklápanie 4

Ak položíme vedľa seba štyri hracie kocky, na ich horných stenách vidíme počty bodiek. Tie môžeme prečítať ako jedno štvorciferné číslo. Napríklad kocky na obrázku určujú číslo 5 232.



Úloha 1: Predstavte si, že štyri kocky na obrázku naraz preklopíte dopredu. Dostanete nové štvorciferné číslo. Preklopte ich ešte dvakrát dopredu. Dostanete ďalšie dve štvorciferné čísla, po každom preklopení jedno.
Tieto štyri štvorciferné čísla sčítajte. Výsledok zapíšte do tabuľky do stĺpca 1. pokus.

Nastavte 4 kocky tak, aby počty bodiek na ich horných stenách ukazovali iné číslo ako 5 232. Potom zopakujte predchádzajúci pokus (teda všetky 4 kocky preklopte trikrát po sebe a potom číslo, ktoré kocky ukazovali vo východiskovej polohe, sčítajte s ďalšími tromi štvorcifernými číslami, ktoré ste dostali po jednotlivých preklopeniach). Výsledný súčet zapíšte do stĺpca 2. pokus.

Urobte tento pokus ešte niekoľkokrát tak, aby číslo, ktoré ukazujú štyri kocky vo východiskovej polohe, bolo pri každom pokuse iné. Výsledný súčet vždy zapíšte. Čo pozorujete?

Úloha 2: Vysvetlite výsledok predchádzajúcej úlohy.

1. pokus	2. pokus	3. pokus	4. pokus	5. pokus	6. pokus

Ak ste tipovali $\frac{41}{23}$, teda ak ste vymenili čitateľa a menovateľa, máte pravdu.

> **!** Prevrátený zlomok k zlomku ✿/❤ je zlomok ❤/✿.

11 Každý zo zlomkov vynásobte zlomkom k nemu prevráteným.

$\frac{3}{12}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{5}{28}$; $\frac{23}{72}$; $\frac{5}{64}$.

Keď už vieme násobiť a vieme, čo je prevrátený zlomok, ukážeme si návod na delenie zlomku zlomkom. Najskôr však vyriešte jednu úlohu.

12 Plot je dlhý 8 metrov a skladá sa z úsekov dlhých a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{2}{3}$ metra. Koľko takých úsekov tam je?

13 Vydeľte podľa tohto návodu $\frac{14}{55} : \frac{21}{85}$.

> **!** Číslo delíme zlomkom tak, že toto číslo vynásobíme prevráteným zlomkom.

Opäť porovnajte svoje riešenie s Liborovým výpočtom.

Libor:

$\frac{14}{55} : \frac{21}{85}$ = číslo $\frac{14}{55}$ krát prevrátený zlomok k zlomku $\frac{21}{85}$ = $\frac{14}{55} \cdot \frac{85}{21} = \frac{14 \cdot 85}{55 \cdot 21} = \frac{1\,190}{1\,155}$

14 Vypočítajte. Výsledok uveďte v základnom tvare.

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ $\qquad$ $\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{13}{10} : \frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{11}{6} : \frac{4}{7}$

15 Zlomky, ktoré majú rovnakú farbu, vydeľte. Pozor, sú to vždy dva príklady.

$\frac{4}{7}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{13}{3}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{10}$.

16 Doplňte ústne vetu:

- Pre každú farbu vyšla v predchádzajúcej úlohe dvojica .... zlomkov.

17 Najväčšie číslo vydeľte najmenším, zvyšné čísla vynásobte. $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{13}{6}$; $\frac{9}{7}$

18 Poradíte si aj s väčšími číslami v čitateľoch a menovateľoch? Vypočítajte a výsledky uveďte v základnom tvare. Nezabudnite, že zlomky môžete zjednodušovať už počas výpočtu.

$\frac{24}{35} : \frac{36}{63}$ $\qquad$ $\frac{27}{38} : \frac{36}{57}$ $\qquad$ $\frac{34}{36} : \frac{51}{45}$ $\qquad$ $\frac{15}{46} : \frac{45}{69}$ $\qquad$ $\frac{34}{57} : \frac{68}{38}$

Zmiešané čísla

Viera a Filip našli takýto zápis: $2\frac{3}{5}$. Teraz sa hádajú, čo znamená.

Filip:

Ja si myslím, že tam zabudli napísať bodku – znak násobenia, čiže to znamená:

$$2\frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$$

Viera:

Ja si zasa myslím, že tam zabudli napísať plus, a preto to znamená:

$$2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

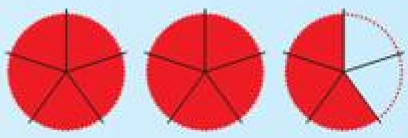
1 Komu by ste dali za pravdu vy?

V tomto prípade má skoro úplnú pravdu Viera. Úplná nie je preto, lebo na plus sa tam nezabudlo, ale je to dohoda. Dohodlo sa tiež, že zlomok, ktorý v tomto zápise vystupuje, je vždy menší ako 1.
Znamená to, že sa nepoužíva napríklad zápis $3\frac{7}{5}$.

Dohoda

$2\frac{3}{5}$ je skrátený zápis súčtu $2 + \frac{3}{5}$. Takýto zápis sa volá zmiešané číslo.

Čítame ho dve a tri pätiny alebo dve celé, tri pätiny.



! Zlomky, ktoré sú menšie ako 1 – tzv. **pravé zlomky** – v tvare zmiešaného čísla nezapisujeme. Zmiešaným číslom teda zapisujeme zlomky, ktoré sú väčšie ako 1 – tzv. **nepravé zlomky**.

2 Zapíšte zlomkami tieto zmiešané čísla:

$2\frac{1}{3}$ $3\frac{2}{5}$ $6\frac{3}{8}$ $5\frac{2}{9}$ $1\frac{7}{13}$ $10\frac{3}{7}$

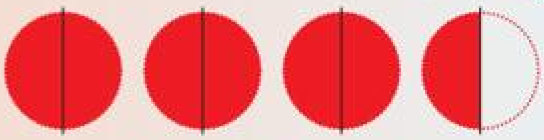
Urobiť zo zmiešaného čísla zlomok bolo ľahké – stačilo sčitovať. Bude to rovnako jednoduché aj naopak – urobiť zo zlomku zmiešané číslo?

3 Zapíšte ako zmiešané číslo a) $\frac{7}{2}$, b) $\frac{7}{4}$, c) $\frac{11}{3}$, d) $\frac{45}{7}$.

Riešili ste to tak ako Soňa?

Soňa:
Sedem polovíc pizze, to sú 3 celé pizze a ešte $\frac{1}{2}$ pizze.
Preto $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$. Stačilo mi zistiť, koľko „celých" je skrytých v zlomku. Najlepšie to zistím delením.

$7 : 2 = 3$, zv. 1.



Podobne napríklad $\frac{45}{7}$ zmením pomocou delenia: $45 : 7 = 6$, zv. 3.
Takže v $\frac{45}{7}$ sa skrýva 6 celých a ešte $\frac{3}{7}$. Mám výsledok: $\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7} = 6\frac{3}{7}$.

4 Zlomky zapíšte ako zmiešané čísla.

$\frac{10}{3}$ $\frac{14}{5}$ $\frac{17}{4}$ $\frac{22}{7}$ $\frac{39}{8}$ $\frac{70}{11}$

5 Zapíšte ako zmiešané čísla desatinné čísla: 2,4; 3,76; 54,007; 42,506 7. Pomôžte si tým, ako sa tieto čísla čítajú.

6 Nájdite medzi číslami rovnaké.

$2{,}6$ $2\frac{3}{5}$ $\frac{62}{20}$ $3{,}1$ $\frac{13}{5}$ $1\frac{3}{10}$ $\frac{26}{20}$

7 Vypočítajte: a) $2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}$, b) $4\frac{1}{8} - 2\frac{1}{16}$, c) $3\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6}$, d) $7\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8}$.
Výsledky uveďte v tvare zlomku aj zmiešaného čísla.

8 Vypočítajte: a) $2\frac{3}{4} \cdot 4\frac{1}{5}$, b) $5\frac{2}{7} : 2\frac{3}{8}$, c) $1\frac{3}{5} \cdot 3\frac{4}{7}$, d) $3\frac{2}{5} : 4\frac{3}{7}$.
Výsledky zapíšte v tvare zlomku aj zmiešaného čísla.

Počítame so zlomkami na kalkulačke

Pri počítaní so zlomkami ste objavili veľa pravidiel, ktoré ste si aj precvičovali. Napriek tomu sa môže stať, že v budúcnosti budete potrebovať pracovať so zlomkami rýchlo a nebudete si vedieť spomenúť na všetky spôsoby výpočtu. Vtedy vám pri výpočtoch môže pomôcť kalkulačka. Niektoré kalkulačky sú na takéto výpočty špeciálne prispôsobené a ako jednu z možností ponúkajú výpočty so zlomkami. Ak máte takúto kalkulačku, vyskúšajte si prácu na nej pomocou návodu, ktorý ste ku kalkulačke dostali.
My sa teraz budeme venovať práci so zlomkami na jednoduchších kalkulačkách.

Začneme dvoma úlohami bez kalkulačiek.

1 Vypočítajte bez kalkulačky a) 100 : 50 · 2, b) 24 – 14 + 10.

2 Vypočítajte bez kalkulačky a) 98 + 2 · 10, b) 110 – 10 : 10, c) 5 · 4 – 3 · 6, d) 40 : 5 – 1 · 2.

Prv než budete pokračovať, skontrolujte si výsledky predchádzajúcich dvoch úloh s výsledkami vzadu. Ak máte nejaký výsledok nesprávne, asi ste zabudli na niektorú dohodu z minulosti.

Pripomíname si

V 1. úlohe musíme počítať postupne zľava doprava, teda:

$100 : 50 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$ a nie $100 \cancel{: 50} \cdot 2 = 100 \cancel{: 100} = 1$
$24 - 14 + 10 = 10 + 10 = 20$ a nie $24 \cancel{- 14} + 10 = 24 \cancel{- 24} = 0$

Vyplýva to z týchto dohôd:

Dohoda

Ak za sebou nasledujú v ľubovoľnom poradí znamienka plus a mínus, tak počítame v poradí, v akom nasledujú. Ak nám to v takomto prípade pomôže, môžeme čísla prehadzovať, ale aj so znamienkami pred nimi.
Napr.:

$(+)28 - 10 + 5 - 28 + 10 = + 10 - 10 + 28 - 28 + 5 = 5$

Dohoda

Ak sú za sebou v ľubovoľnom poradí znamienka krát a delenie, počítame v poradí, v akom sú napísané. Ak nám to v takomto prípade pomôže, môžeme čísla prehadzovať, ale aj so znamienkami pred nimi.

Napr.:

$(\cdot)56 : 125 \cdot 2 : 7 \cdot 125 = (\cdot)125 : 125 \cdot 56 : 7 \cdot 2 = 16$

V 2. úlohe nesmieme počítať postupne zľava doprava. Najskôr musíme násobiť a deliť a až potom môžeme sčitovať a odčitovať:

$98 + 2 \cdot 10 = 98 + 20 = 118$ a nie $98 \cancel{+ 2 \cdot} 10 = 100 \cancel{\cdot 10 = 1}\,000$

Vyplýva to z dohody:

Dohoda

V príkladoch s viacerými operáciami má násobenie a delenie prednosť pred sčítaním a odčítaním.

Napr.:

$20 - 8 : 4 + 4 \cdot 2 = 20 - (8 : 4) + (4 \cdot 2) = 20 - 2 + 8 = 26$

3 Farebne ako v predchádzajúcich ukážkach vypočítajte zvyšné tri príklady z úlohy 2.

4 Precvičte si všetky dohody a vypočítajte bez kalkulačky.

a) $14 + 2 \cdot 3$ b) $21 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6$ c) $32 - 2 + 8$ d) $32 - 2 \cdot 8$

5 Vypočítajte ešte raz príklady v úlohách 1, 2 a 4, tentoraz na kalkulačke.

Ako sa vám darilo pri počítaní na kalkulačke? Dosiahli ste len správne výsledky? Pri počítaní s kalkulačkou môžu nastať problémy v tom, že spomínané dohody nemusia byť v kalkulačke naprogramované. Mali by ste preto zistiť (buď sami, alebo si nechať pomôcť), ako je to v kalkulačke, ktorú používate. Ak máte kalkulačku, ktorá má tieto dohody zakomponované, stačí na nej stláčať tlačidlá pre jednotlivé operácie tak, ako idú za sebou. Ak máte kalkulačku, ktorá tieto dohody naprogramované nemá, môžete si pomôcť doplnením zátvoriek tak, aby boli splnené dohody. Potom stačí na nej stláčať tlačidlá pre jednotlivé operácie a zátvorky tak, ako idú za sebou.

Napr.: $20 - 14 : 7 \cdot 2 + 12 \cdot 4 = 20 - (14 : 7 \cdot 2) + (12 \cdot 4) = \ldots$

6 Vypočítajte na kalkulačke.

a) $3 + 2 : 5$ b) $3 + \frac{2}{5}$ c) $10 - 2 \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{2} + 3 \cdot 2 - \frac{1}{10}$

Sčítanie a odčítanie zlomkov prevodom na desatinné čísla

Ak si spomenieme, že zlomok je naznačené delenie, môžeme zlomky prepísať na delenie:

$\frac{3}{8} = 3 : 8$ $\qquad$ $5 - \frac{4}{25} = 5 - 4 : 25$ $\qquad$ $\frac{7}{5} \cdot \frac{12}{21} = 7 : 5 \cdot 12 : 21$

Pozor si musíme dávať iba pri delení zlomkom. Buď ho najprv prevedieme na násobenie prevráteným zlomkom:

$$4 : \frac{8}{5} = 4 \cdot \frac{5}{8} = 4 \cdot 5 : 8$$

alebo použijeme zátvorky:

$4 : \frac{8}{5} = 4 : (8 : 5)$, a nie $\cancel{4 : \frac{8}{5} = 4 : 8 : 5}$

Prečo je to tak, zistíte, keď vyriešite nasledujúcu úlohu.

1 Vypočítajte a) 4 : (8 : 5), b) 4 : 8 : 5.

Vyšli dva rôzne výsledky, ale správny môže byť len jeden. Pomôžeme si desatinnými číslami:

$\frac{8}{5} = 1{,}6$ preto $4 : \frac{8}{5} = 4 : 1{,}6 = 2{,}5$

Je lepšie, keď si delenie zlomkom najprv zmeníme na násobenie prevráteným zlomkom:

$$4 : \frac{8}{5} = 4 \cdot \frac{5}{8} = 4 \cdot 5 : 8$$

2 Úlohu $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ môžeme zapísať aj niekoľkými ďalšími spôsobmi, napr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$, 2 : 3 : (5 : 7) alebo 2 : 3 · 7 : 5. Posledný z týchto zápisov neobsahuje zátvorky ani zlomky. Zapíšte nasledujúce úlohy tak, aby neobsahovali zlomky ani zátvorky.

a) $2 \cdot \frac{8}{5}$ $\qquad$ b) $3 : \frac{2}{3}$ $\qquad$ c) $\frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{2}{5}$ $\qquad$ d) $\frac{8}{2} - \frac{2}{3} : \frac{8}{6}$

Teraz, keď viete prepísať príklad so zlomkami na príklad bez zlomkov, môžete ho počítať na kalkulačke.

3 Vyriešte príklady z úlohy 2 na kalkulačke aj bez kalkulačky. Vyšli vám rovnaké výsledky?

S výpočtom podobným výpočtu povrchu sa stretnete aj v niektorých situáciách v bežnom živote.

14 Vypočítajte, koľko približne by stálo vymaľovanie izby v staršom rodinnom dome (podlaha sa nemaľuje, okná a dvere sa nemaľujú), ak izba má rozmery: dĺžka – 4,5 m, šírka – 4 m, výška – 2 m. Izba má jedny dvere s rozmermi 1,2 m x 1,8 m a jedno okno s rozmermi 1,5 m x 1 m. Zároveň viete, že 1 m^2 maľovky stojí približne 1,50 €.

15 Podľa údajov na internete stojí nalakovanie 1 dm^2 dreva 0,20 €. Koľko zaplatíme za nalakovanie dreveného kvádra s rozmermi 5 cm x 10 cm x 20 cm?

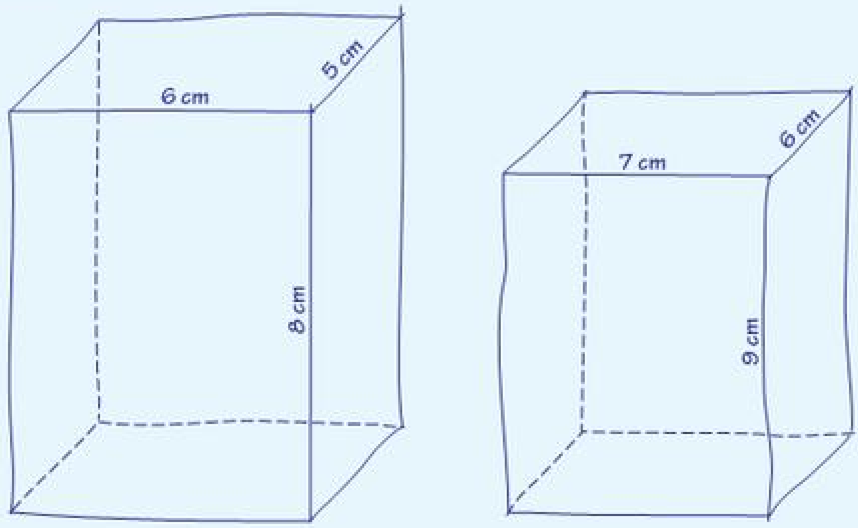
16 Pripravte v skupinách rozpočet na vymaľovanie vašej triedy, počítačovej učebne, telocvične. Potrebné údaje odmerajte, odhadnite alebo zistite u pani riaditeľky alebo pána riaditeľa. Cenu maľovky nájdite na internete.

17 Aký povrch má kváder zložený z 12 kociek s rozmerom 15,2 cm? Nájdete všetky 4 riešenia?

Ktoré teleso zaberá viac miesta?

Z*ačneme hneď otázkou v nadpise. Ak ste pozorní, nebude pre vás ťažká.*

1 Na obrázku sú voľnou rukou načrtnuté dva kvádre. Ktorý z nich v skutočnosti zaberá viac miesta?



Na prvý pohľad sa zdá, že prvý kváder zaberie viac miesta, veď je očividne väčší. No nie je to tak. Väčšie je len jeho znázornenie. V skutočnosti je kváder menší. Veď každý jeho rozmer je menší ako príslušný rozmer druhého kvádra.

Teraz si všimnime, aké výsledky môžeme dostať pri počítaní na kalkulačke. Najjednoduchší je prípad, keď je výsledkom desatinné číslo, ktoré sa celé zmestí na displej kalkulačky.

4 Vypočítajte na kalkulačke. Výsledok zapíšte v tvare desatinného čísla.

$\frac{1}{2} + 0{,}5$ $\quad 0{,}45 - \frac{3}{8}$ $\quad 0{,}18 + \frac{3}{25}$ $\quad \frac{3}{5} + 0{,}5 \cdot \frac{3}{2}$ $\quad 4 : \frac{1}{2} - 2 : 0{,}25$

Často však výsledok nie je desatinné číslo, ale číslo s periódou. Ak chceme poznať presný výsledok, potrebujeme, aby sa celá perióda vošla na displej.

5 Vypočítajte na kalkulačke a výsledok zapíšte v tvare desatinného čísla s periódou.

a) $\frac{1}{9} + \frac{35}{126}$ b) $\frac{4}{33} - \frac{2}{99}$ c) $0{,}283 + \frac{19}{37} \cdot \frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{5} : \frac{271}{3}$ e) $\frac{21}{56} + \frac{43}{111}$

Môže sa však stať, že celá perióda sa na displej nezmestí. V takom prípade sa musíme uspokojiť s tým, že nepoznáme presný, ale iba približný výsledok.

Nie vždy potrebujeme presné výsledky. Preto namiesto zápisu čísla s periódou často stačí zapísať zaokrúhlené číslo. Toto bude užitočné najmä vtedy, keď je výsledok taký dlhý, že periódu v ňom nevidíme.

6 Vypočítajte $\frac{9}{41} : \frac{7}{16}$.

Pri výpočte príkladu $\frac{9}{41} : \frac{7}{16}$ dostaneme

$$\frac{9}{41} : \frac{7}{16} = \frac{9}{41} \cdot \frac{16}{7} = 0{,}5017421602787456445993031358888...$$

Vidíte, že hoci náš displej má viac ako 30 miest, z tohto čiastočného výsledku sa nedá určiť perióda. Nevieme teda nájsť úplne presný výsledok, vieme však zapísať približný výsledok.

Napríklad:

- *pri zaokrúhlení na milióntiny nahor dostaneme:* $\frac{9}{41} : \frac{7}{16} \doteq 0{,}501\,743$
- *pri zaokrúhlení nahor na 10 desatinných miest dostaneme:* $\frac{9}{41} : \frac{7}{16} \doteq 0{,}501\,742\,160\,3$
- *pri zaokrúhlení na tisíciny dostaneme:* $\frac{9}{41} : \frac{7}{16} \doteq 0{,}502$

7 Vypočítajte. Výsledok uveďte zaokrúhlený podľa zadania.

a) $\frac{4}{31} - \frac{2}{61}$, na tisíciny nahor; b) $\frac{17}{19} : \frac{41}{131}$, na stotiny nadol;

c) $\frac{37}{387} + 0{,}25 \cdot \frac{12}{17}$, na 6 desatinných miest; d) $\frac{430}{103} - \frac{253}{572} \cdot 0{,}1$, na tisíciny nadol.

9 POVRCH A OBJEM KOCKY A KVÁDRA, JEDNOTKY OBJEMU A ICH PREMIEŇANIE

Ktorá sieť je väčšia?

Spomínate si, ako sme obliekali kocku a kváder?

1 Narysujte jednu sieť kocky s hranou dlhou 4 cm a jednu sieť kvádra s rozmermi 3 cm x 4 cm x 5 cm.

Zuzanu a Juraja zaujímalo, na ktorú z ich sietí by bolo treba väčší kus papiera.

Jurajova sieť

Zuzanina sieť

Juraj:
Podľa mňa je to moja sieť, lebo je dlhšia ako tvoja:

4 cm + 4 cm + 4 cm + 4 cm = 16 cm
3 cm + 4 cm + 3 cm + 4 cm = 14 cm

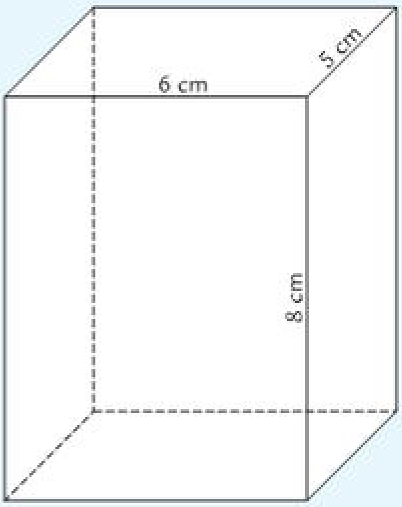
Zuzana:
Podľa mňa je to moja sieť, lebo je vyššia ako tvoja:

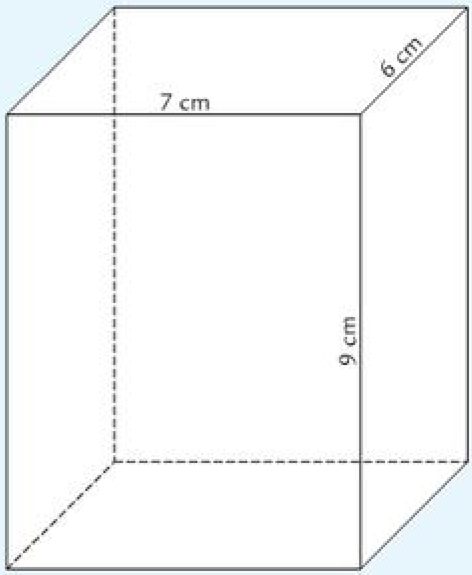
4 cm + 5 cm + 4 cm = 13 cm
4 cm + 4 cm + 4 cm = 12 cm

Kto má podľa vás pravdu? Ktorá sieť je podľa vás väčšia?
Ako vidíte, názory môžu byť rôzne. Preto je dobré opäť sa dohodnúť.

Dohoda

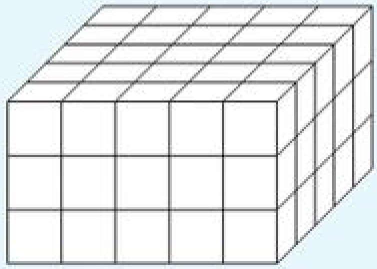
Väčšia je tá sieť, na ktorú minieme viac papiera, teda tá, ktorá má väčší obsah.



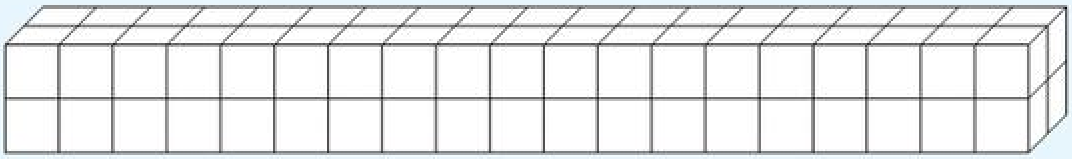


Ako to však bude s kvádrami, ak ich rozmery nebudú také, že každý rozmer jedného je menší ako príslušný rozmer druhého?

2 Ktorý z kvádrov s rozmermi 5 cm, 5 cm, 3 cm a 2 cm, 19 cm, 2 cm zaberie menej miesta?



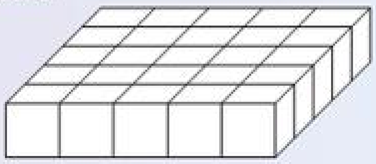
Pri riešení tejto úlohy si pomôžeme krájaním. Budeme to robiť iba symbolicky – v predstave.
Predstavme si, že oba kvádre rozrežeme na kocky s hranou 1 cm.



Gabriela si so zisťovaním počtu kociek, z ktorých sa skladá prvý kváder, poradila takto:

Gabriela:

Kváder na obrázku sa skladá z troch rovnakých poschodí.
Keď si predstavím jedno poschodie,
vidím, že vyzerá takto:



V jednom poschodí je teda $5 \cdot 5 = 25$ kociek.
Kedže v každom z troch poschodí je ich rovnako veľa, spolu ich bude $3 \cdot 25 = 75$.

2 Vypočítajte obsah Jurajovej siete kocky s hranou 4 cm aj Zuzaninej siete kvádra s hranami 3 cm, 4 cm a 5 cm. Ktorý obsah je väčší?

3 Načrtnite ďalšie 3 siete každého z týchto telies a vypočítajte všetkých 6 obsahov týchto sietí.

Pozrite sa, ako obsahy vypočítala Zuzana s Jurajom.

Zuzana:

Každá sieť kocky sa skladá zo šiestich rovnakých štvorcov. Preto stačí, keď vypočítam obsah jedného štvorca: $4\ cm \cdot 4\ cm = 16\ cm^2$

a tento obsah vynásobím šiestimi: $16\ cm^2 \cdot 6 = 96\ cm^2$

Juraj:

Každá sieť kvádra sa skladá zo šiestich obdĺžnikov, z ktorých dva sú vždy rovnaké. Preto stačí vypočítať obsahy troch obdĺžnikov, každý vynásobiť dvoma a tieto obsahy sčítať:

$3\ cm \cdot 4\ cm = 12\ cm^2$ $\quad 12\ cm^2 \cdot 2 = 24\ cm^2$

$3\ cm \cdot 5\ cm = 15\ cm^2$ $\quad 15\ cm^2 \cdot 2 = 30\ cm^2$

$4\ cm \cdot 5\ cm = 20\ cm^2$ $\quad 20\ cm^2 \cdot 2 = 40\ cm^2$

$24\ cm^2 + 30\ cm^2 + 40\ cm^2 = 94\ cm^2$

Zuzana:

Ja som obsah siete kvádra počítala inak:
Najskôr som vypočítala, aký obsah majú spolu tri rôzne obdĺžniky, z ktorých sa skladá polovica siete, a až tento výsledok som vynásobila dvoma:

$3\ cm \cdot 4\ cm = 12\ cm^2$

$3\ cm \cdot 5\ cm = 15\ cm^2$

$4\ cm \cdot 5\ cm = 20\ cm^2$

$12\ cm^2 + 15\ cm^2 + 20\ cm^2 = 47\ cm^2$

$47\ cm^2 \cdot 2 = 94\ cm^2$

Tiež mi to vyšlo $94\ cm^2$.

Juraj:

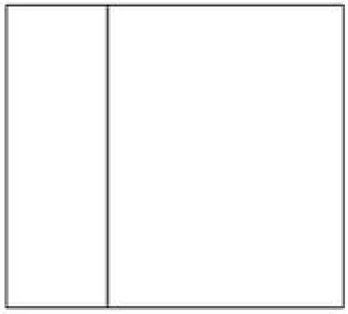
Tak či tak, obsah siete kocky je o $2\ cm^2$ väčší ako obsah siete kvádra.

4 Vypočítajte obsah siete kocky s hranou dlhou 12 mm.

5 Vypočítajte obsah siete kvádra s rozmermi 1 cm, 1 dm a 1 m.

6 Opíšte, ako vyzerá kváder z úlohy 5. Čomu z bežného života sa podobá?

7 Na obrázku je časť siete kvádra. Vypočítajte obsah celej siete. Pomôžte si meraním.

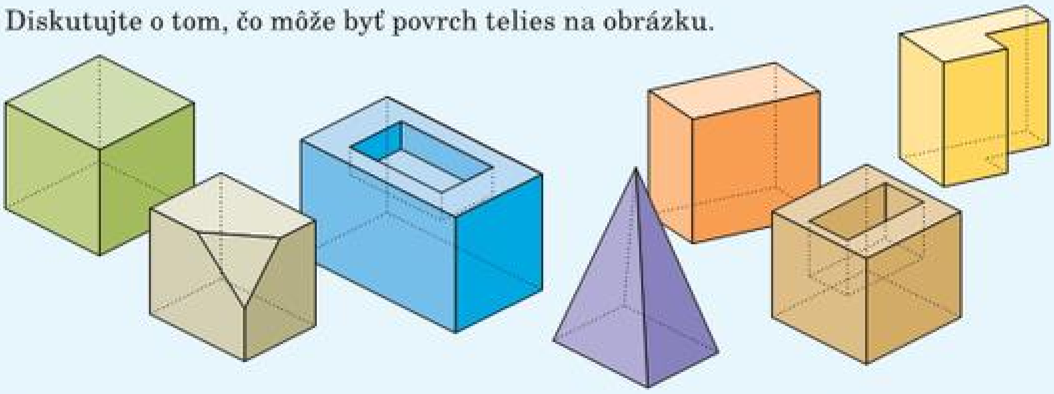


8 Z kvádra s rozmermi 4 cm x 6 cm x 7 cm sme odrezali „rožtek“ tvaru kocky s hranou dlhou 2 cm.
a) Narysujte jednu sieť tohto telesa.
b) Vypočítajte obsah tejto siete aj obsah siete pôvodného kvádra.

Povrch kocky a kvádra

S *o slovom povrch ste sa už určite stretli. „Drevo má drsný povrch.“ „Na povrchu Mesiaca sa našla voda.“ „Pod povrchom Zeme sa skrýva mnoho nerastov.“*

1 Diskutujte o tom, čo môže byť povrch telies na obrázku.



2 Načrtnite, z čoho sa podľa vás skladá povrch jednotlivých telies. Porovnajte, na čo jednotlivé skupiny prišli.

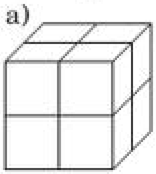
3 Prišli ste v skupinách na to isté? Porovnajte to s Janovým tvrdením.

4 Skontrolujte, či to, čo ste načrtli pri riešení úlohy 2, je to, čo by sa zafarbilo, keby dané teleso spadlo do vedra s farbou.

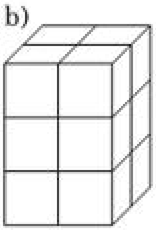
Aj vám vyšlo, že Jano má pravdu?

3 Z koľkých malých kociek sa skladajú kocky a kvádre na obrázku?

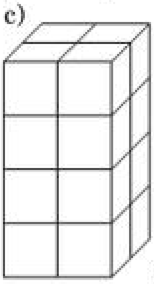
a)



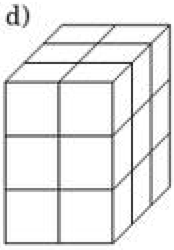
b)



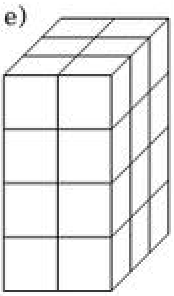
c)



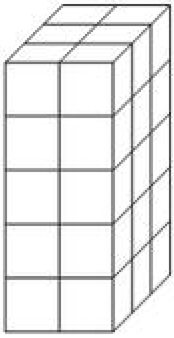
d)



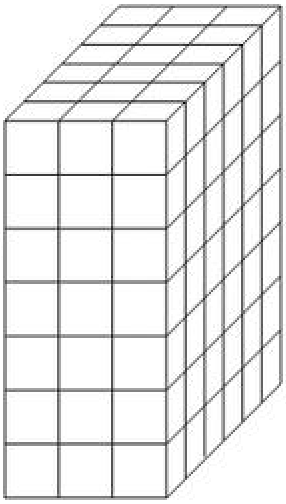
e)



f)

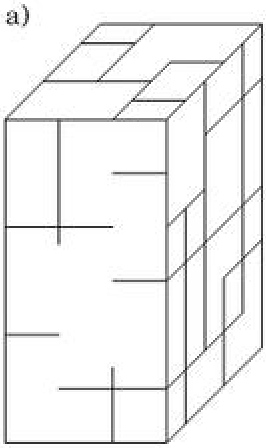


g)

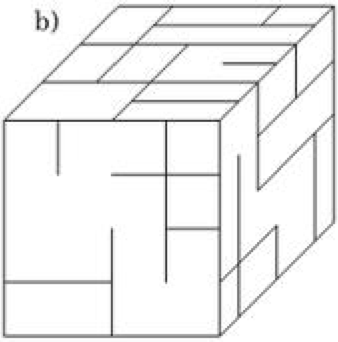


4 Ktorý z kvádrov zložených z rovnakých kociek zaberie najmenej a ktorý najviac miesta?

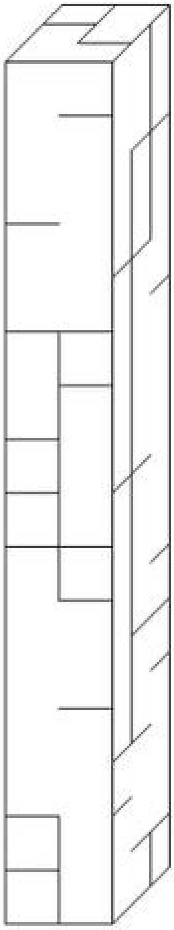
a)



b)

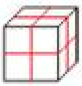


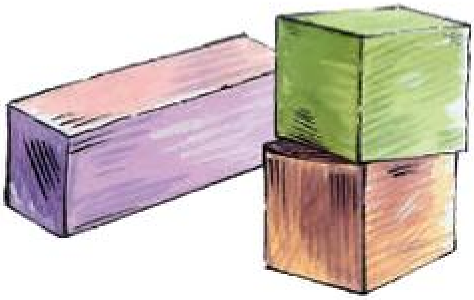
c)



5 Eva si chce z 30 rovnakých kociek postaviť kváder. Koľko rôznych kvádrov môže z týchto kociek postaviť, ak vždy použije všetky kocky? Vypíšte, aké rozmery môžu mať tieto kvádre.

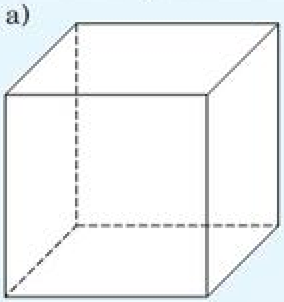
6 Predstavte si, že ste každú malú kocku z kvádra s rozmermi 2 x 4 x 7 rozrezali na osem maličkých kociek. Z koľkých maličkých kociek sa tento kváder skladá?



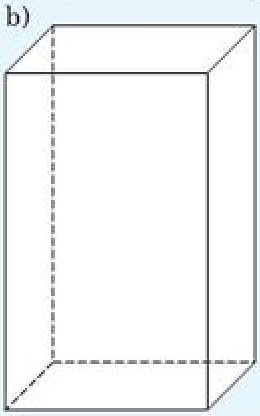


5 Načrtnite aj s rozmermi, z akých častí sa skladajú povrchy telies na obrázku.

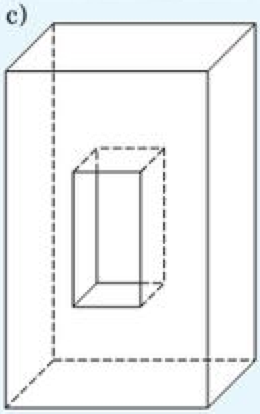
a)



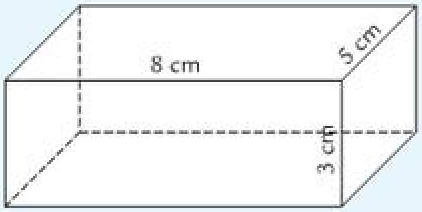
b)

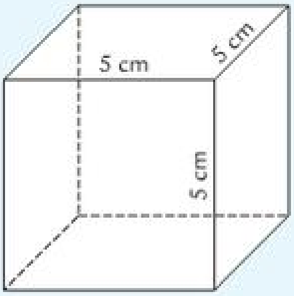


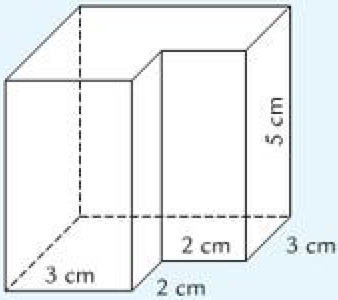
c)



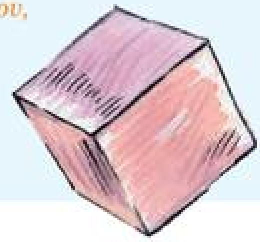
6 Ktoré z telies na obrázku má podľa vás najväčší a ktoré najmenší povrch?







Aj vy ste povrchy počítali tak, že ste sčítali obsahy mnohouholníkov, z ktorých sa povrch telesa skladá?



7 Vypočítajte povrch kvádra s rozmermi a) 7 cm, 8 cm a 10 cm, b) 1,3 dm, 2,1 dm a 4,6 dm.

8 Vypočítajte povrch kocky s hranou dlhou a) 3 cm, b) 6 cm, c) 1 dm, d) 0,5 m.

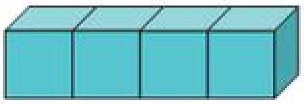
9 Vypočítajte povrch kvádra s rozmermi a) 2 cm, 3 cm, 7 cm; b) 5 cm, 5 cm, 6 cm.

10 Hracia kocka má povrch 37,5 cm^2. Zmestí sa do koženého puzdra tvaru kocky s hranou dlhou 2,4 cm?

11 O koľko sa zväčší povrch kvádra s rozmermi 8 cm x 9 cm x 6 cm, ak jeden rozmer zväčšíme o 2 cm?

12 Aký povrch má „had“ zložený a) z 3, b) zo 4, c) z 5 kociek s rozmerom 6 cm?

13 Aký povrch má „had“ zložený a) zo 100, b) z 9 999 kociek s rozmerom 6 cm?



Objem telies

Ak nakupujete v obchode minerálky alebo malinovky, prípadne ak varíte čaj či polievku, určite sa stretnete so slovom objem. Objem určuje, koľko vody alebo inej tekutiny sa zmestí do nádoby, hrnca alebo fľaše. Inými slovami povedané, aký priestor zaberajú.

1 Spomeňte si, s ktorými jednotkami objemu ste sa už stretli pri nakupovaní. Aký objem mali minerálky, ktoré ste kupovali? Aký objem má fľaša, v ktorej si nosíte do školy vodu alebo džús? Aký je objem malej fľašky, v ktorej sú nosové kvapky?

*Jednou z často používaných jednotiek objemu je **liter**. Toto slovo ste už určite počuli, napr. v spojení liter mlieka alebo liter džúsu. Táto jednotka sa používa hlavne na určenie objemu tekutých a sypkých látok.*

! Pri sypkých látkach si však musíme uvedomiť, že môžu zaberať rôzny objem. Vyskúšajte si to.

2 Nasypte nejakú sypkú látku (piesok, jemný štrk...) do nádoby a zaznačte si jej objem. Potom nádobou niekoľkokrát poriadne zatraste a pozrite sa na jej objem.

S litrom ste sa stretli aj v predchádzajúcich ročníkoch pri premieňaní jednotiek. Rovnako ako meter, aj liter má tie isté menšie a väčšie násobky. Dokonca s rovnakými predponami a s podobným značením. Najprv si pripomeňme násobky metra.

3 Vymenujte, ktoré sú menšie a väčšie násobky metra. Napíšte do zošita ich skratky.

4 Najprv si zopakujeme základné prevody.

1 km = ... m	1 m = ... km	1 m = ... dm	1 dm = ... m
1 m = ... cm	1 cm = ... m	1 m = ... mm	1 mm = ... m

5 Pripomeňme si ďalšie prevody. Premeňte:

1 dm = ... cm	1 cm = ... mm	1 cm = ... dm	1 mm = ... cm
1 dm = ... mm	1 km = ... dm	1 mm = ... dm	1 dm = ... km

6 Ústne doplňte vety.

a) Pri premieňaní centimetrov na milimetre stačí posunúť desatinnú čiarku tak ako pri násobení 10, teda o .... miest... ....
b) Pri premieňaní metrov na centimetre stačí posunúť desatinnú čiarku tak ako pri násobení číslom ....., teda o .... miest... ....
c) Pri premieňaní decimetrov na metre stačí posunúť desatinnú čiarku tak ako pri .... číslom ....., teda o .... miest... ....
d) Pri premieňaní kilometrov na metre stačí posunúť desatinnú čiarku tak ako pri .... číslom ....., teda o .... miest... ....
e) Pri premieňaní .... na milimetre stačí posunúť desatinnú čiarku tak ako pri násobení 100, teda o .... miest... ....

*Liter bude mať rovnaké násobky ako meter. Pri pomenovaní násobkov litra sa používajú rovnaké predpony: **mili-**, **centi-**, **deci-**, **deka-**, **hekto-**, **kilo-**. S týmito predponami sa stretnete aj pri pomenúvaní násobkov iných jednotiek.*

Napríklad:

- *Predpona **mili-** znamená tisícinu.*

Milimeter je tisícina metra: 1 mm = 0,001 **m**

Mililiter je tisícina litra: 1 ml = 0,001 **l**

Miligram je tisícina gramu: 1 mg = 0,001 **g**

- *Predpona **hekto-** znamená stonásobok.*

Hektometer je sto metrov: 1 hm = 100 **m**

Hektoliter je sto litrov: 1 hl = 100 **l**

Hektogram je sto gramov: 1 hg = 100 **g**

7 Zapíšte pomocou značiek správne jednotky objemu: mililiter, centiliter, deciliter, dekaliter, hektoliter, kiloliter.

8 Doplňte ústne vety.

Tisícina litra je ....
Stotina litra je ....
Stonásobok litra je ....
Desatina litra je ....

Podobne ako pri jednotkách dĺžky alebo obsahu, aj pri jednotkách objemu sa niektoré násobky používajú častejšie a iné menej často alebo skoro vôbec. Pri jednotkách objemu sa okrem litra asi najčastejšie stretnete s decilitrom, hektolitrom a mililitrom. Niekedy, najmä v laboratóriách, sa používa aj jednotka centiliter.

V bežnom živote sa občas stretnete aj s nesprávnym označením decilitra – dcl.

0,5 l = 5 dl

9 Pomôžte si jednotkami dĺžky a premeňte po stĺpcoch.

2 m = ... mm	0,3 hm = ... m	40 dm = ... m	600 cm = ... m
2 l = ... ml	0,3 hl = ... l	40 dl = ... l	600 cl = ... l

Pri prevážaní väčšieho objemu tekutín sa ich množstvo často udáva v hektolitroch. Jeden hektoliter si môžete predstaviť napr. ako objem smetnej nádoby.

Objem nádoby je **1,1 hl**.

10 Premeňte všetky údaje v článku, ktoré vyjadrujú objem, na hektolitre. Koľko stolitrových sudov nafty uniklo do Dunaja podľa a) velenia lode, b) rakúskej strany, c) webového portálu ORF?

Do Dunaja uniklo 630 litrov nafty

Príčinou úniku ropných látok zo slovenskej lode TRINOVEC vo štvrtok 9. septembra 2010 bolo technické zlyhanie.

Podľa velenia lode uniklo do Dunaja približne 630 litrov nafty, čo je údaj zistený každodenným odpočtom spotreby a zostávajúceho stavu pohonných hmôt.

„Tieto merania sa vykonávajú každých 24 hodín a sú spoľahlivé. Preto považujeme údaj z rakúskej strany hovoriaci o úniku až 1 500 litrov nafty za neprimeraný," uviedol hovorca spoločnosti Slovenská plavba a prístavy.

Webový portál rakúskeho verejnoprávneho rozhlasu a televízie ORF s odvolaním sa na policajné zdroje informoval, že z remorkéra uniklo do Dunaja až 10 000 litrov nafty.

(Z tlače 10. 9. 2010)

11 Premeňte na decilitre.

a) 3 l, 3,5 l, 3,57 l, 56,4 l, 32,34 l

b) 3 ml, 3,5 ml, 3,57 ml, 56,4 ml, 32,34 ml

12 Doplňte vety. Pred každým doplnením si vymyslite jeden príklad na požadovanú premenu. (Príklad na prvú premenu by mohol byť napr. 156 ml = 15,6 cl).

- Pri premieňaní mililitrov na centilitre posunieme desatinnú čiarku o ... miest... ....
- Pri premieňaní litrov na mililitre posunieme desatinnú čiarku o ... miest... ....
- Pri premieňaní decilitrov na litre posunieme desatinnú čiarku o ... miest... ....
- Pri premieňaní litrov na hektolitre posunieme desatinnú čiarku o ... miest... ....
- Pri premieňaní centilitrov na .... posunieme desatinnú čiarku o 2 miesta doľava.
- Pri premieňaní .... na decilitre posunieme desatinnú čiarku o 1 miesto doľava.

13 Precvičte si premieňanie jednotiek objemu posúvaním desatinnej čiarky. Prekreslite si tabuľku do zošita a vyplňte ju.

mililitre	centilitre	decilitre	litre	hektolitre
	0,2			
		130		
410				
				0,2
			300	

14 Nepomýlia vás pomiešané jednotky? Premeňte.

40 cl = ... l	100 ml = ... dl	27 l = ... cl	9 400 l = ... kl
21 000 ml = ... l	0,02 kl = ... l	0,014 l = ... ml	2,09 cl = ... dl
0,002 7 hl = ... dl	49 cl = ... l	2 700 ml = ... kl	130 ml = ... l

Ako meriame objem v domácnosti

Objem potrebujeme často odmerať aj v domácnosti, napríklad pri varení. Používame na to rôzne nádoby, na ktorých je objem zaznačený.

1 Odmerajte pomocou „merača“, ktorý máte doma, objem 6 rozličných pohárov alebo hrnčekov... Aký objem má kakao, ktoré pijete na raňajky? Koľko mlieka sa dáva do koláča, ktorý ste doma naposledy piekli?

2 Zistite na internete objem jednej kvapky vody.

3 Koľko kvapiek malinovky je v pollitrovej fľaši? Koľko stojí kvapka vašej obľúbenej malinovky?

Zákazník sa pýta čašníka:
„Prosím vás, koľko stojí kvapka malinovky?“
Čašník:
„Nebláznite, tá je zadarmo.“
Zákazník:
„Tak mi nakvapkajte pol litra.“

Jednotky objemu v iných krajinách

Pri cestovaní do rôznych krajín sa môžete stretnúť aj s inými jednotkami objemu, ako je liter alebo jeho násobky.

1 Zistite, aké jednotky objemu sa používajú a) v USA, b) vo Veľkej Británii.

2 Nájdite jednotky objemu, ktoré sa niekde vo svete používajú a o ktorých ste ešte nepočuli.

*V správach môžete počuť o cene za jeden **barel** ropy. Slovo barel vzniklo z anglického slova barrel – sud. Slovo barel označuje viac rôznych jednotiek. Barel ropy je v USA približne 159 litrov (označuje sa aj bbl). Barel piva vo Veľkej Británii je približne 163,5 litra. Barel piva v USA je približne 119 litrov. Inou jednotkou, ktorá v rozličných situáciách vyjadruje rozdielne množstvá, je **galón**.*
Galón vo Veľkej Británii je približne 4,55 litra. Galón pri tekutinách v USA je približne 3,785 litra.
*Keby ste išli do Veľkej Británie, v reštaurácii by vašim rodičom ponúkli **pintu** piva. Jedna pinta je približne 0,568 litra.*
Pri receptoch sa zasa často používajú jednotky čajová lyžička, polievková lyžica, hrnček. Podobne je to aj vo Veľkej Británii. Jeden britský hrnček (cup) je približne 2,84 dl, 1 polievková lyžica (tablespoon) je asi 1,78 cl a 1 čajová lyžička (teaspoon) je približne 0,44 ml.

3 Prezradíme vám, že jeden britský galón sa skladá z celočíselného počtu pínt. Koľko pínt je jeden galón vo Veľkej Británii?

4 Overte výsledok úlohy 3 na internete alebo pomocou aplikácie vo vašom mobilnom telefóne.

Jednotky objemu odvodené od dĺžkových jednotiek

Okrem litra a jeho násobkov sa na meranie objemu používajú aj jednotky, ktorých názov je odvodený od dĺžkových jednotiek.

Keďže základnou jednotkou dĺžky je meter, základnou jednotkou objemu bude objem kocky, ktorá má hranu presne 1 meter. Takýto objem voláme kubický meter. Kubický meter má skratku m^3. Podobne objem kocky s hranou 1 centimeter budeme nazývať kubický centimeter. Skratka pre kubický centimeter je cm^3.
Objem kocky s hranou dlhou 1 decimeter bude kubický decimeter. A objem kocky s hranou 1 milimeter bude kubický milimeter.
Kubický milimeter má veľkosť podobnú špendlíkovej hlavičke. Väčšina hracích kociek, ktoré používate pri stolových hrách, má objem podobný kubickému centimetru. A kocka s objemom kubický decimeter má rovnaký objem ako mlieko, ktoré predávajú v škatuliach.

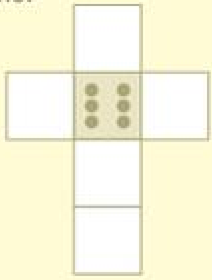
Poznámka:
Spisovné označenie jednotky objemu je *kubický meter*.
V bežnom živote sa však často stretnete aj s pomenovaním *meter kubický*.

Firma Kocka 1

Na jednotlivých stenách hracích kociek je 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 bodiek. Súčet počtu bodiek na protiľahlých stenách kocky je vždy 7. Znamená to, že na jednej dvojici protiľahlých stien sú počty bodiek 1 a 6, na druhej 2 a 5 a na tretej 3 a 4.
Firma KOCKA sa rozhodla vyrábať neštandardné hracie kocky. Na jednotlivých stenách síce bude 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 bodiek, ale už nebude platiť, že súčet na protiľahlých stenách je vždy 7.
Prvý model nových kociek nazvali CASINO. Na týchto kockách bol súčet počtu bodiek na jednej dvojici protiľahlých stien 5 a na druhej dvojici protiľahlých stien 6.

Úloha 1: Aký bol súčet počtu bodiek na zvyšných dvoch protiľahlých stenách? Ak má úloha viac riešení, nájdite všetky.

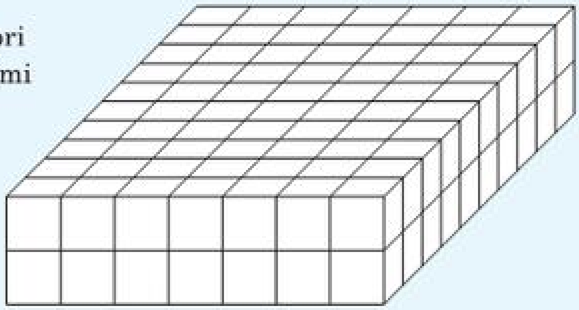
Úloha 2: Na obrázku je sieť kocky CASINO. Dokreslite bodky na zvyšných piatich stenách. Úloha má viac riešení, no stačí, ak nájdete jedno.



Počítame objem kocky a kvádra

A *k chceme určiť objem kocky alebo kvádra, napr. v cm^3, stačí keď zistíme, z koľkých kociek s hranou 1 cm sa skladajú.*

1 Koľko kociek s hranou 1 cm „majú“ pri susedných hranách kvádre s rozmermi
a) 7 cm x 10 cm x 2 cm,
b) 3 cm x 4 cm x 11 cm,
c) 1 cm x 12 cm x 5 cm,
d) 3 cm x 25 cm x 40 cm?



2 Z koľkých kociek s hranou 1 cm sa skladajú kvádre z úlohy 1?

3 Vypočítajte objemy kvádrov z úlohy 1 v cm^3.

4 Vypočítajte v cm^3 objemy kvádrov s rozmermi a) 8 cm, 8 cm a 9 cm; b) 20 cm, 80 cm a 90 cm; c) 56 cm, 1 cm a 40 cm; d) 4 cm, 25 cm a 1 m.

Počítali ste tak ako Boris?

Boris:

a) 8 · 8 · 9 = 576, b) 20 · 80 · 90 = 144 000,
c) 56 · 1 · 40 = 2 240, d) 4 · 25 · 1 = 100.

Ak áno, pravdepodobne ste zabudli, že keď počítame objem v kubických ***centimetroch****, musíme vynásobiť dĺžky hrán vyjadrené v* ***centimetroch****. Preto Boris posledný objem vypočítal nesprávne.*

! Objem kvádra **v cm^3** môžeme vždy vypočítať tak, že vynásobíme dĺžky všetkých troch jeho hrán vyjadrené **v centimetroch**.

Borisov správny výpočet časti d) mal byť takýto:
Najskôr mal premeniť 1 m = 100 cm a až potom mal počítať objem:

d) 4 · 25 · 100 = 10 000 cm^3

5 Určte v cm^3 objem kocky s hranou 4 cm.

Postupovali ste tak ako Hedviga?

Hedviga:
Preto dĺžka, šírka aj výška danej kocky budú rovnaké – 4 cm. Objem kocky v kubických centimetroch vypočítam ľahko:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\ cm^3.$$

6 Prekreslite si tabuľky do zošita a vyplňte ich.

a)

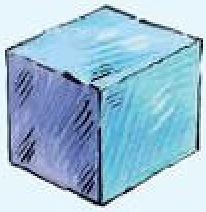
Kváder			
Jedna hrana	**Druhá hrana**	**Tretia hrana**	**Objem**
6 cm	9 cm	12 cm	
3 cm	15 cm		180 cm^3
	12 cm	14 cm	504 cm^3
6 cm		6 cm	900 cm^3

b)

Kocka	
Hrana	**Objem**
4 cm	
6 cm	
	125 cm^3
	512 cm^3

7 Koľko kociek s hranou 1 mm „majú" pri susedných hranách kvádre s rozmermi a) 7 cm x 10 cm x 2 cm, b) 3 cm x 4 cm x 11 cm, c) 1 cm x 12 cm x 5 cm, d) 3 cm x 25 cm x 40 cm?

8 Z koľkých kociek s hranou 1 mm sa skladajú kvádre z úlohy 7?



9 Vypočítajte objemy kvádrov z úlohy 7 v mm^3.

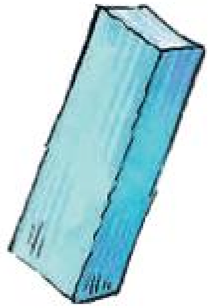
Asi ste si už dali pozor a všetko ste počítali v milimetroch.

> **!** Objem kvádra **v mm^3** môžeme vždy vypočítať tak, že vynásobíme dĺžky všetkých troch jeho hrán vyjadrené **v milimetroch**.

10 Vypočítajte v mm^3 objemy kvádrov s rozmermi a) 8 mm, 3 mm a 9 mm; b) 6 cm, 4 cm a 11 cm; c) 56 mm, 2 cm a 40 mm; d) 14 mm, 1 cm a 1 m.

11 Doplňte nasledujúce vety:

- Objem kvádra v m^3 môžeme vždy vypočítať tak, že vynásobíme dĺžky jeho všetkých troch susedných hrán vyjadrené v ....
- Objem kvádra v .... môžeme vždy vypočítať tak, že vynásobíme dĺžky jeho všetkých troch susedných hrán vyjadrené v decimetroch.



12 Vypočítajte objem kvádra s rozmermi 2 m, 5 m a 7 m v a) m^3, b) cm^3, c) mm^3, d) dm^3, e) km^3.

13 Určte objem kocky s hranou a) 2 cm, b) 3 mm, c) 4 dm, d) 5 m v dm^3.

14 Uveďte rozmery troch rôznych kvádrov, ktoré majú objem 36 cm^3.

15 Vypočítajte objem kvádra s rozmermi a = 3 cm, b = 4 cm a c = 6 cm.

16 Čo má väčší objem: kocka s hranou dĺžky 5,2 dm alebo kváder s rozmermi 3,8 dm, 49 cm a 0,56 m? O koľko?

17 Aká je hmotnosť sklenenej výplne dverí, ak výplň má hrúbku 5 mm, výšku 2,10 m a šírku 65 cm? (1 dm^3 skla má hmotnosť 2,5 kg)

Premieňanie jednotiek objemu

Aký je vzťah medzi m^3, dm^3, cm^3 a mm^3? Najlepšie bude, keď si predstavíme kocku s hranou 1 cm, ktorá zodpovedá objemu 1 cm^3. Keby sme ju rozrezali na menšie kocky s hranou 1 mm, zistili by sme, koľko mm^3 je v jednom cm^3.

1 Koľko kociek dostaneme, ak kocku s hranou 1 cm rozrežeme na menšie kocky s hranou 1 mm?

Pozrite sa, ako pri riešení uvažovala Kamila.

Kamila:

Ak mám kocku s hranou 1 cm rozrezať na kocky s hranou 1 mm, musím rezať vo všetkých troch smeroch. Dostaneme tak 10 poschodí, v každom bude $10 \cdot 10$ kociek.
Spolu dostanem $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ kociek.
Preto 1 cm^3 = 1 000 mm^3.

Platí, že: $1\ cm^3 = 1\,000\ mm^3$

Ako to bude s dm^3 a s cm^3? Pomôže vám obrázok? Nakreslite si ho.

Platí, že: $1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3$

Podobne bude platiť, že: $1\ m^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10\ dm^3 = 1\,000\ dm^3$

2 Aká časť kubického metra je jeden kubický decimeter? Aká časť kubického decimetra je jeden kubický centimeter? Aká časť kubického centimetra je jeden kubický milimeter?

Kubický meter je tisíckrát väčší ako kubický decimeter, preto kubický decimeter je jedna tisícina kubického metra.
Môžeme teda zapísať:

$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$	$1\ cm^3 = 0{,}001\ dm^3$	$1\ mm^3 = 0{,}001\ cm^3$

3 Koľko mm^3 je v jednom dm^3?

Vieme, že jeden kubický decimeter možno rozdeliť na 1 000 kubických centimetrov. Každý z týchto 1 000 kubických centimetrov môžeme rozdeliť na 1 000 kubických milimetrov. Preto v jednom kubickom decimetri bude $1\,000 \cdot 1\,000 = 1\,000\,000$ kubických milimetrov.

Podobne v $1\ m^3$ bude $1\,000\,000\ cm^3$.

4 Premeňte jednotky:

$1\ cm^3 = \dots\ mm^3$ $\quad$ $1\ dm^3 = \dots\ cm^3$ $\quad$ $1\ m^3 = \dots\ dm^3$

$1\ dm^3 = \dots\ mm^3$ $\quad$ $1\ m^3 = \dots\ cm^3$ $\quad$ $1\ km^3 = \dots\ m^3$

5 Premeňte jednotky:

$1\ mm^3 = \dots\ cm^3$ $\quad$ $1\ cm^3 = \dots\ dm^3$ $\quad$ $1\ dm^3 = \dots\ m^3$

$1\ mm^3 = \dots\ dm^3$ $\quad$ $1\ cm^3 = \dots\ m^3$ $\quad$ $1\ m^3 = \dots\ km^3$

Keď si to zhrnieme, môžeme zapísať:

$$1\ cm^3 = 1\,000\ mm^3$$

$$1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\ mm^3$$

$$1\ m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$$

$$1\ km^3 = 1\,000\ m \cdot 1\,000\ m \cdot 1\,000\ m = 1\,000\,000\,000\ m^3$$

Pri premieňaní jednotiek objemu budeme môcť podobne ako pri premieňaní jednotiek dĺžky alebo obsahu používať posúvanie desatinnej čiarky. Napríklad pri premieňaní kubických centimetrov na kubické milimetre stačí posunúť desatinnú čiarku o tri miesta doprava, lebo je to to isté ako násobenie číslom tisíc.

$$0{,}683\ \text{cm}^3 = 683\ \text{mm}^3$$

6 Precvičte si premieňanie jednotiek a vyplňte tabuľku:

mm^3	cm^3	dm^3	m^3	km^3
6 800 000 000				
		3 900 000		
				0,000 000 02
	300 000 000			
			1,2	

7 Správne prečítajte čísla z prvého stĺpca vyplnenej tabuľky z úlohy 6.

8 Premeňte na rovnaké jednotky a vypočítajte:
$4{,}3\ \text{cm}^3 + 0{,}17\ \text{dm}^3$ $\quad 0{,}002\ \text{m}^3 + 11\,500\ \text{cm}^3$ $\quad 3\,200\ \text{mm}^3 + 78\ \text{cm}^3$

9 Doplňte chýbajúce jednotky:
$6\,500\ \text{cm}^3 = 6{,}5$ ..... $\quad 0{,}039\ \text{m}^3 = 39$ ..... $\quad 370\,000\ \text{cm}^3 = 0{,}37$ .....
$0{,}357\ \text{m}^3 = 357\,000$ ..... $\quad 3\,000\,000\,000\ \text{m}^3 = 3$ ..... $\quad 73\,000\ \text{mm}^3 = 73$ .....

10 Usporiadajte vzostupne tieto objemy:
$0{,}018\ \text{m}^3$, $1\,800\,000\,000\,000\ \text{mm}^3$, $1\,800\ \text{dm}^3$, $180\,000\ \text{cm}^3$, $18\ \text{m}^3$, $180\,000\ \text{dm}^3$, $0{,}000\,18\ \text{km}^3$

11 Nájdite, aký objem v km^3 majú jednotlivé planéty slnečnej sústavy. Aký objem v km^3 má Slnko?

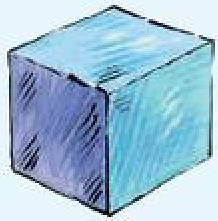
Premieňanie jednotiek objemu ešte raz

Možno ste aj vy premýšľali nad tým, kedy na meranie objemu používame litre a jeho násobky a kedy kubické metre či iné kubické jednotky.
Neexistuje na to pravidlo, hoci objem tekutých vecí sa často udáva pomocou litra a jeho násobkov a objem ostatných vecí pomocou kubických jednotiek.
V každom prípade je užitočné vedieť premieňať jedny jednotky na druhé a naopak.
Čo je to teda za objem ten 1 liter?

Experiment Mlieko predávajú v obchode často v škatuliach. Objem tejto škatule je 1 liter. Odmerajte jej rozmery a vypočítajte jej objem v kubických centimetroch a v kubických decimetroch.

Aj vám vyšlo, že objem litrovej škatule vyjadrený v kubických centimetroch je približne 1 000 cm³, teda 1 dm³? Ak áno, nie je to náhoda.
Jeden liter je totiž len špeciálne pomenovanie pre jeden kubický decimeter.

$$1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$$



Môžeme zapísať aj, že $1\ l = 1\ 000\ cm^3 = 1\ 000\ 000\ mm^3$.

1 Premeňte na litre:
a) $2{,}3\ \text{cm}^3$ b) $30\ 000\ \text{mm}^3$ c) $2\ \text{m}^3$

Pozrite, ako premieňal Emil.

Emil:
Viem, že $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{l}$.
Preto si pomôžem tak, že všetky dané údaje premením najskôr na kubické decimetre.
Viem, že $2{,}3\ \text{cm}^3 = 0{,}002\ 3\ \text{dm}^3$, preto $2{,}3\ \text{cm}^3 = 0{,}002\ 3\ \text{l}$.
Viem, že $30\ 000\ \text{mm}^3 = 0{,}03\ \text{dm}^3$, preto $30\ 000\ \text{mm}^3 = 0{,}03\ \text{l}$.
Viem, že $2\ \text{m}^3 = 2\ 000\ \text{dm}^3$, preto $2\ \text{m}^3 = 2\ 000\ \text{l}$.

2 Koľko cm^3 je 34,8 ml?

Emil si ľahko poradil aj s touto úlohou.

Emil:
Najskôr si mililitre premením na litre: $34{,}8\ \text{ml} = 0{,}034\ 8\ \text{l}$
Toľko isto je to decimetrov kubických: $34{,}8\ \text{ml} = 0{,}034\ 8\ \text{l} = 0{,}034\ 8\ \text{dm}^3$
Teraz dm^3 premením na cm^3: $0{,}034\ 8\ \text{dm}^3 = 34{,}8\ \text{cm}^3$
Vyšlo mi, že mililitre a centimetre kubické predstavujú ten istý objem.

Vyšlo to tak aj vám? Myslíte si, že je to náhoda?

Paula

Paula:

Keď premieňam mililitre na cm^3, najskôr premieňam mililitre na litre. Pritom posuniem desatinnú čiarku o 3 miesta doľava. Toľko isto je to decimetrov kubických. Tie keď premieňam na centimetre kubické, posuniem desatinnú čiarku o 3 miesta doprava.
Je jasné, že vyjde to isté!

$$1\ \text{ml} = 1\ \text{cm}^3$$

Môžeme zapísať aj, že 1 ml = 1 000 mm^3.
Takže pri premieňaní väčších jednotiek na menšie je potrebné dané číslo postupne násobiť číslom 1 000, resp. 10, teda posúvať desatinnú čiarku o 3, resp. 1 miesto doprava.
Pri premieňaní menších jednotiek na väčšie je potrebné dané číslo postupne deliť číslom 1 000, resp. 10, teda posúvať desatinnú čiarku o 3, resp. 1 miesto doľava.

3 Premeňte po stĺpcoch na jednotky uvedené v zátvorke:

24 m^3 (cm^3) = ...
0,008 1 dm^3 (mm^3) = ...
100 200 mm^3 (cm^3) = ...
0,000 034 dm^3 (cm^3) = ...

0,09 cl (l) = ...
1,003 dl (ml) = ...
1 003 dm^3 (dl) = ...
24,05 cm^3 (l) = ...

4 Odhadnite, koľko by vážila nádoba tvaru kocky s hranou dlhou 1 m, ktorá by bola plná vody. Potom túto hmotnosť vypočítajte (1 liter vody váži 1 kg, prázdna nádoba váži 50 kg).

5 Precvičte si ešte premieňanie jednotiek objemu.

8,3 cm^3 = ... mm^3
1 709 cl = ... dm^3
0,000 84 m^3 = ... hl
0,103 5 hl = ... dm^3

0,002 dl = ... cm^3
120,4 ml = ... cm^3
20 900 000 mm^3 = ... dl
16,184 l = ... mm^3

6 Odmerajte doma rozmery vašej a) chladničky, b) mikrovlnky a vypočítajte jej približný objem. Porovnajte tento údaj s údajom v návode na použitie alebo na internete.

7 Približne koľko litrov vzduchu je vo vašej triede? Rozmery triedy zistite od pána školníka.

8 Bazén tvaru kvádra má rozmery 50 m x 20 m a hĺbku 300 cm. Pri napúšťaní hladina vody v bazéne stúpne o 2 mm za minútu.

a) Koľko litrov vody pritečie za hodinu?
b) Koľko hl vody sa zmestí do bazéna naplneného po okraj?
c) Bazén začali napúšťať v pondelok ráno o 8.00 hod. Kedy bude naplnený po okraj?

Komu sa viac darilo?

V živote sa často stretneme s tým, že potrebujeme porovnať rozličné časti rôznych celkov. Niekedy je to jednoduchšie, inokedy zložitejšie.

1 Basketbalový skaut si počas zápasu všímal dve basketbalistky. Jedna z nich – Majka – dala z 20 dvojbodových pokusov 13 košov a druhá – Janka – dala z 10 dvojbodových pokusov 7 košov. Ktorá z nich bola úspešnejšia v hádzaní dvojbodových košov?

Poznámka:
Skautom okrem člena skautskej organizácie voláme aj človeka, ktorý vyhľadáva talenty, napr. v hokeji alebo basketbale.

2 Kto má podľa vás pravdu?

To, čo mala na mysli Janka, by sme mohli nazvať úspešnosť hádzania alebo produktivita streľby. V skutočnosti by Janka pri ďalších desiatich pokusoch nemusela hodiť zasa presne 7 košov. Mohla by hodiť menej alebo aj viac. Spolu 14 košov by hodila vtedy, keby v druhej desiatke pokusov mala rovnakú úspešnosť hádzania ako v prvej.
Ak by sme sa pozerali len na počet úspešných pokusov, šikovnejšia bola Majka.

Skaut Stano si všimol, že v tom istom zápase hrala aj Vierka. Tá dala z 15 dvojbodových pokusov 10 košov. Chcel porovnať jej úspešnosť s Majkinou. Povedal si, že keď má zistiť, ktorá z dievčat má väčšiu úspešnosť, bolo by lepšie, keby hádzali rovnako veľa pokusov.

3 Vypočítajte, koľko košov by dala Vierka a koľko Majka, keby obe hádzali s tou istou úspešnosťou ako doteraz, ale každá by hádzala 60-krát.

4 Skúsme ešte jedno porovnanie. Pôvodne Majka hádzala 20-krát a Vierka 15-krát. Vypočítajte, koľko košov by asi dala Vierka, keby aj ona hádzala 20-krát s rovnakou úspešnosťou, akú mala predtým.

Vyšlo vám to rovnako ako Petrovi a Ľubošovi?

Peter:
Majka by hádzala tri série po 20 (lebo $3 \cdot 20 = 60$)
a dala by $3 \cdot 13$ košov = 39 košov.
Vierka by hádzala štyri série po 15 (lebo $4 \cdot 15 = 60$)
a dala by $4 \cdot 10$ košov = 40 košov.
Väčšiu úspešnosť mala Vierka.

Ľuboš:
Vierka hodila z 15 pokusov 10 košov. Z 20 pokusov by dala $\frac{20}{15}$-krát viac = $1,\overline{3}$-krát viac košov (lebo $\frac{20}{15} = 1,\overline{3}$ a 20 pokusov je $1,\overline{3}$-krát viac ako 15). Dala by teda $\mathbf{1,\overline{3} \cdot 10 = 13,\overline{3}}$ košov. To je približne 13,3, čiže viac ako Majka, ktorá hodila 13 košov.
Vierka bola úspešnejšia.

V čom sa odlišoval Petrov a Ľubošov výpočet?
Peter chcel pracovať presne, teda len s „celými košmi“. Ľubošovi neprekážalo, že mu nevyšiel celý počet košov, a pokojne pracoval so zlomkami a s desatinnými číslami.

5 Ako sme zistili, že pri počte 60 pokusov budú vychádzať celé počty košov?

Pri počte 20 pokusov je rozumné pracovať so sériami po 20 pokusov, teda s číslami 20, $2 \cdot 20 = 40$, $3 \cdot 20 = 60$, 80, 100, 120, 140... Podobne pri počte 15 pokusov nám vyhovujú čísla 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120... Číslo 60 je v oboch týchto zoznamoch.

6 Porovnajte oboma spôsobmi (Petrovým aj Ľubošovým) úspešnosť Vierky a Janky.

7 V súperovom družstve hodila Boženka z 25 pokusov 18 košov. Porovnajte Petrovým spôsobom jej úspešnosť s úspešnosťou a) Janky, b) Majky, c) Vierky.

Peter chcel vyriešiť všetky 3 prípady naraz.

Peter:
Pri Janke sú výhodné série po 10 pokusoch, teda čísla 10, 20, 30...
Pri Majke sú výhodné série po 20 pokusoch, teda čísla 20, 40, 60...
Pri Vierke sú výhodné série po 15 pokusoch, teda čísla 15, 30, 45...
Pri Boženke sú výhodné série po 25 pokusoch, teda čísla 25, 50, 75...

8 a) Ktoré číslo bude najvýhodnejšie pre všetky štyri dievčatá?
b) Koľko košov by dali jednotlivé dievčatá pri tomto počte?

9 Porovnajte úspešnosť všetkých štyroch dievčat tak, že prepočítate, koľko košov by približne dali pri 70 pokusoch.

10 Určte, kto bol úspešnejší pri kopaní na bránu:
a) Jakub, ktorý z 15 striel trafil 12-krát, alebo Tomáš, ktorý z 20 striel trafil 15-krát.
b) Karol, ktorý z 18 striel trafil 14-krát, alebo Roman, ktorý z 28 striel trafil 22-krát.
c) Filip, ktorý z 9 striel trafil 7-krát, alebo Juraj, ktorý z 11 striel trafil 8-krát.
d) Šimon, ktorý z 20 striel trafil 19-krát, alebo Cyril, ktorý z 30 striel trafil 28-krát?

11 Ktorý z ôsmich chlapcov z úlohy 10 bol najšikovnejší a ktorému sa darilo najmenej?

12 Z 200 výrobkov série A bolo 17 nepodarkov. V sérii B bolo zo 150 výrokov 13 nepodarkov. Ktorá séria je kvalitnejšia?

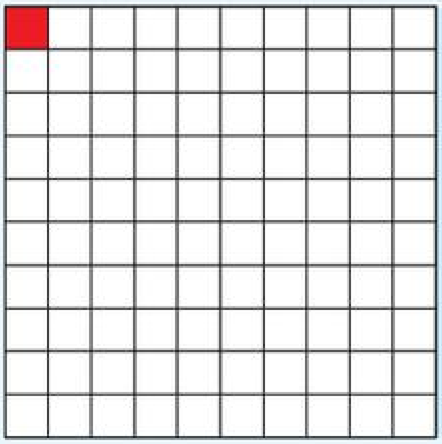
V predchádzajúcich úlohách ste si vyskúšali, že ak chcete porovnávať údaje, je dobré si ich prepočítať na rovnaký základ. Napríklad v úlohe 8 sme prepočítavali úspešnosť Janky, Majky, Vierky a Boženky pri rovnakom základe – pri počte pokusov 300, v úlohe 9 pri základe 70.

V predchádzajúcich úlohách si Peter volil základy, pri ktorých sa pracuje presne a s prirodzenými číslami. Nevýhodou takýchto základov je, že sa väčšinou ťažko zisťujú. Preto tento spôsob nie je najvýhodnejší. Našťastie, v predchádzajúcich úlohách sme zistili, že pri porovnávaní sa dokážeme zaobísť aj bez takýchto „pekných“ Petrových základov – porovnať Janku, Majku, Vierku a Boženku sme dokázali aj pri základe 70, pri ktorom nevychádzali celočíselné počty.

Zostáva ešte jeden problém: Ak Majku s Vierkou porovnáme pri základe 30, Vierku s Boženkou napr. pri základe 50 a chceme porovnať Majku s Boženkou, museli by sme všetko znova prepočítavať na spoločný základ. Vyhovovalo by nám teda, keby sme Majku s Vierkou aj Vierku s Boženkou mali porovnané pri rovnakom základe. Preto sa ľudia v minulosti dohodli, že rozumný základ, na ktorý budú všetko prepočítavať, bude 100. Budeme teda pracovať so stotinami.

Jedna stotina ako časť celku sa volá ***percento****. Toto slovo vzniklo z latinského prekladu „na sto“ = „per cento“.*
Percentá majú aj svoju značku:

%



1 % je stotina celku.

Celok – základ je 100 %.

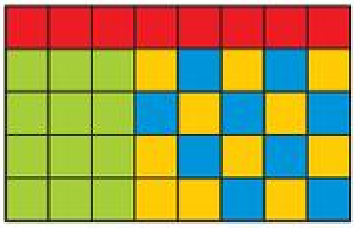
$\frac{1}{100}$ celku = 0,01 celku = 1 % z celku

13 Vyjadrite, koľko gólov zo 100 pokusov by dal každý chlapec z úlohy 10. Odpoveď povedzte v tvare: „Jakub by dal ... gólov zo 100 pokusov, darilo sa mu teda na ... percent.“ Výsledky zaokrúhlite na celé čísla.

14 Správne prečítajte zápisy: 14 %, 28 %, 50 %. Nakreslite do zošita štvorec rozdelený na: a) 100, b) 50, c) 25 rovnakých častí a uvedené časti vyfarbite tromi rôznymi farbami.

15 Koľko percent zo štvorca z úlohy 14 ostalo nevyfarbených?

16 a) Aká časť obdĺžnika je vyfarbená jednotlivými farbami?
b) Koľko percent z obdĺžnika je vyfarbených jednotlivými farbami?



Určite sa aj vám lepšie počítala časť a).
Napríklad červené štvorčeky tvoria 1 rad z 5 radov, teda je ich $\frac{1}{5}$ zo všetkých štvorčekov. Modrých štvorčekov je zasa 9 z $8 \cdot 5 = 40$ štvorčekov, teda ich je $\frac{9}{40}$ zo všetkých štvorčekov.
Ak chceme výsledky vyjadriť v percentách, stačí zapísať tieto výsledky v tvare zlomku s menovateľom 100 (teda zistiť, koľko štvorcov zo 100 by bolo vyfarbených). Čitateľ potom určí počet percent. Percentá sú totiž stotiny.

17 Zapíšte zlomky $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$ a $\frac{11}{40}$ na zlomky s menovateľom 100.

Pri červených to ide ľahko $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{20}{100}$, dostávame 20 %.

Pozrite, ako si so žltými štvorčekmi poradili Lívia, Kamila a Ivan.

Lívia:

Zlomok musím rozšíriť tak, aby menovateľ bol 100. Teraz je menovateľ 40. Preto musím rozširovať číslom $100 : 40 = 2{,}5$.

$$\frac{11}{40} = \frac{11 \cdot 2{,}5}{40 \cdot 2{,}5} = \frac{27{,}5}{100}$$

Dostala som 27,5 %.

Kamila:

Zistím, kolko štvorcov by bolo vyfarbených žltou farbou, keby všetkých štvorcov nebolo 40, ale 100. Keďže 100 je 2,5-krát viac ako 40, aj žltých štvorčekov by bolo 2,5-krát viac, čiže 27,5.

Ivan:

Zlomok je naznačené delenie. Preto keď mám zlomok upraviť na stotiny, stačí, keď čitateľa vydelím menovateľom a pozriem sa, kolko stotín mi vyšlo.

$11 : 40 = 0{,}275$

0,27|5 je 27,5 stotiny a dostanem 27,5 %.

18 Upravte na tvar zlomku s menovateľom 100 zlomky:

a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{3}{8}$, d) $\frac{9}{10}$, e) $\frac{18}{32}$, f) $\frac{7}{15}$, g) $\frac{7}{8}$, h) $\frac{19}{16}$.

19 Koľko percent z celku a) sú $\frac{3}{4}$, b) sú $\frac{2}{5}$, c) sú $\frac{3}{8}$, d) je $\frac{9}{10}$, e) je $\frac{18}{32}$, f) je $\frac{7}{15}$, g) je $\frac{7}{8}$, h) je $\frac{19}{16}$ z celku? Nezabudnite, že môžete použiť aj Ivanov spôsob.

20 V predchádzajúcich úlohách ste si mohli všimnúť, že niekedy môže byť stotín aj viac ako 100. Koľko stotín je:

a) $\frac{9}{8}$, b) $\frac{21}{16}$, c) $\frac{9}{7}$, d) $\frac{12}{11}$, e) $\frac{37}{20}$, f) $\frac{1\,326}{1\,000}$?

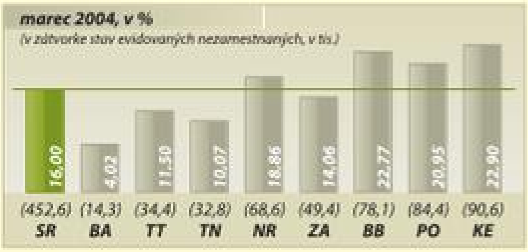
21 Určte, koľko percent z celku je: a) $\frac{9}{8}$, b) $\frac{21}{16}$, c) $\frac{9}{7}$, d) $\frac{12}{11}$, e) $\frac{37}{20}$, f) $\frac{1\,326}{1\,000}$ z celku.

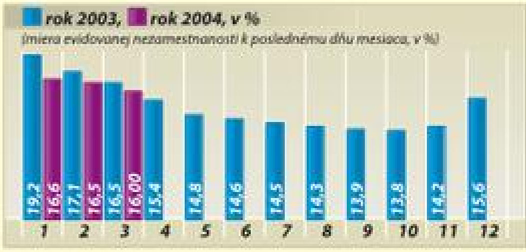
22 Karol si chce kúpiť novú gitaru. Už má našetrených $\frac{5}{8}$ z potrebnej sumy. Koľko percent už má našetrených? Koľko percent ešte musí našetriť?

23 Triedy v jednej škole sa rozhodli zapojiť do zberu papiera a kovov. Trieda 7.A sa zaviazala, že vyzbiera 120 kg papiera. Trieda 7.B chcela vyzbierať 1 500 kg kovov. Nakoniec 7.A nazbierala 105 kg papiera a 7.B nazbierala 1 150 kg kovov. Ktorá trieda bola úspešnejšia v plnení svojho predsavzatia?

Miera nezamestnanosti 1

Na obrázkoch sú dva diagramy *. Na prvom je znázornená *miera nezamestnanosti*. Tá určuje, koľko percent z počtu všetkých práceschopných obyvateľov predstavujú evidovaní nezamestnaní. Prvý stĺpec charakterizuje situáciu na Slovensku, ďalšie opisujú situáciu v jednotlivých krajoch Slovenska: v Bratislavskom (BA), Trnavskom (TT), Trenčianskom (TN), Nitrianskom (NR), Žilinskom (ZA), Banskobystrickom (BB), Prešovskom (PO) a Košickom (KE).
Druhý diagram znázorňuje časový vývoj nezamestnanosti na Slovensku.





Úloha 1: V ktorom kraji Slovenska bola v marci 2004 najvyššia miera nezamestnanosti?

Úloha 2: V ktorom zo sledovaných mesiacov bola na Slovensku najnižšia miera evidovanej nezamestnanosti? Napíšte názov mesiaca aj rok.

Úloha 3: Koľko evidovaných nezamestnaných bolo na Slovensku v marci 2004?

Úloha 4: Alena sa pozorne pozrela na diagramy a povedala: „Neviem, koľko bolo na Slovensku v marci 2004 evidovaných nezamestnaných, ale 452 548 to nemohlo byť." Má Alena pravdu? Svoju odpoveď vysvetlite.

*Zdroj: NÚP

Počítame s percentami

V predchádzajúcej kapitole sme si povedali, že jedno percento je jedna stotina celku. Skúsme spoločne objaviť, ako sa s percentami počíta.

Koľko je jedno percento?

1 Vypočítajte a) jednu stotinu, b) 1 % z celkov 23 500; 2 350; 235; 23,5; 2,35; 0,235.

Aj vy ste prišli na to, že v častiach a) a b) počítame to isté?
Napríklad pre číslo 235 je výpočet aj výsledok v obidvoch prípadoch rovnaký:

235 : 100 = 2,35

Odpoveď pre a): Jedna stotina z 235 je 2,35.
Odpoveď pre b): Jedno percento z 235 je 2,35.

2 Vypočítajte jedno percento z: a) 238 700; b) 8 710; c) 106; d) 4,237; e) 0,8.

3 Agentúra na prieskum verejnej mienky zisťovala u respondentov (opýtaných), ktorú politickú stranu budú voliť. Presne 38 percent, t. j. 456 z týchto ľudí sa vyjadrilo, že budú voliť stranu XY. Presne 1 % z respondentov sa ešte nerozhodlo. Koľko ľudí z prieskumu sa ešte nerozhodlo?

Poradili ste si s predchádzajúcou úlohou?

Soňa:
Viem, koľko je 38 % z opýtaných a mám zistiť, koľko je 1 % z opýtaných.

1 % ....?

38 % 456

Jedno percento bude 38-krát menej ako 38 percent. → 456 : 38 = 12.
Ešte sa nerozhodlo 12 respondentov.

4 Zistite 1 % z celku, ak viete, že: a) 20 % z celku je 740, b) 18 % z celku je 558, c) 72 % z celku je 117, d) 400 % z celku je 7, e) 126 % z celku je 189.

Teraz to skúsime naopak.
Prezradíme vám, koľko je 1 %, a vy zistíte, z akého základu sme počítali.

5 Vypočítajte celok, ak 1 % z neho sa rovná: a) 32; b) 320; c) 0,032; d) 3,5; e) 0,647.

Určite ste tiež prišli na to, že:

Celok je 100-krát viac, ako je 1 % z neho.

Napríklad pre prípad c) dostávame 100 · 0,032 = 3,2
V tomto prípade je celok 3,2.

6 Agentúra sa pýtala respondentov, ktorú politickú stranu budú voliť. Presne 1 %, čiže 9 ľudí, sa vyjadrilo, že budú voliť stranu PQ. Presne 44 % z respondentov by zasa volilo stranu GH. Koľko ľudí z prieskumu by volilo stranu GH?

Soňa:

Viem, koľko je 1 % z opýtaných a mám zistiť, koľko je 44 % z opýtaných.

Bude to 44-krát viac. ⟹ $44 \cdot 9 = 396$.
Stranu GH by volilo 396 opýtaných.

7 Vyriešte úlohu 6 s tým, že namiesto 9 ľudí bude a) 16, b) 8, c) 11 ľudí.

8 Vyriešte úlohu 6 s tým, že namiesto 44 % bude: a) 49 %, b) 37 %, c) 16 % respondentov.

9 Jedno percento z neznámeho čísla je: a) 34; b) 7; c) 3,28; d) 0,46; e) 2,831; f) 200. Zistite neznáme číslo.

10 Prekreslite si do zošita tabuľku a vyplňte ju.

Dané číslo	45	167,8	2 360				1 000		20 300
1 % z daného čísla				45	167,8	2 360		1 000	

11 Vypočítajte, koľko je 1 %, 7 %, 54 %
a) z 3 800, b) zo 72 840, c) zo 608, d) z 3,56.

Viac percent

Pri väčšine výpočtov s percentami je vhodné najprv zistiť, koľko je jedno percento. To už vieme vypočítať.

1 Z 210-kilometrového úseku diaľnice zatiaľ postavili 45 %. Koľko kilometrov trate z tohto úseku už postavili?

Veríme, že s predchádzajúcou úlohou ste si poradili rovnako dobre ako Jana.

Jana:

1 % .... ? km

45 % .... ? km

100 % .... 210 km

Najprv vypočítam, koľko je 1 % z 210 kilometrov. To už ovládam:
210 km : 100 = 2,1 km

Keď viem, že 1 % je 2,1 km, tak 45 % musí byť 45-krát viac. Aj to už ovládam:
45 · 2,1 km = 94,5 km.

Zatiaľ postavili 94,5 kilometra diaľnice.

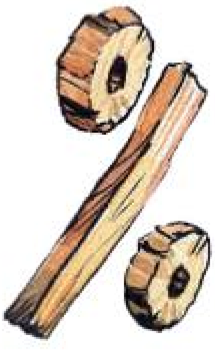
2 Vyriešte úlohu 1 s tým, že namiesto 45 % bude: a) 16 %, b) 76 %, c) 11,2 %.

3 Vyriešte úlohu 1 s tým, že namiesto 210 km bude: a) 135, b) 184, c) 90,5 km.

4 Koľko je: a) 12 %, b) 45 %, c) 300 %, d) 5,84 % z čísel na obrázku?

5 Agentúra sa pýtala 1 250 respondentov, ktorú politickú stranu budú voliť. Pre stranu *Za životné prostredie* sa v tomto prieskume vyjadrilo presne 6 % respondentov. Koľko je to respondentov?

6 Vyriešte úlohu 5 s tým, že namiesto 6 % bude:
a) 16 %, b) 8,4 %, c) 11,28 %.

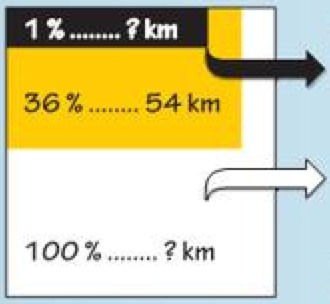


7 Vyriešte úlohu 5 s tým, že namiesto 1 250 bude:
a) 1 350, b) 800, c) 1 100 ľudí.

Teraz to skúsime naopak.

8 Z úseku diaľnice medzi mestami A a Z zatiaľ postavili 36 %, čo je presne 54 km. Aký dlhý je celý úsek diaľnice medzi mestami A a Z?

Jana:



Najprv vypočítam, koľko je 1 % z úseku. Bude to **36**-krát menej, ako je **36** %.

54 km : 36 = 1,5 km

Teraz vypočítam celok, čiže 100 %. To bude 100-krát viac:

$100 \cdot 1{,}5$ km = 150 km.

Celý úsek diaľnice medzi mestami A a Z meria 150 km.

9 Vyriešte úlohu 8 s tým, že namiesto 36 % bude: a) 45 %, b) 13,5 %, c) 11,25 %.

10 Vyriešte úlohu 8 s tým, že namiesto 54 km bude: a) 45 km, b) 60,3 km, c) 85,05 km.

11 Vypočítajte celok, ak 24 % z neho je: a) 300; b) 3; c) 5,1; d) 0,141; e) 50.

Ako vám vyšlo riešenie časti e) úlohy 11? Ak vám vyšlo $208{,}\overline{3}$ alebo $208\frac{1}{3}$, oba výsledky sú správne, pretože označujú to isté číslo.

12 Riešte úlohu 11 nie pre 24 %, ale pre: a) 12 %, b) 48 %, c) 30 %.

13 Z úseku diaľnice medzi mestami K a L v minulom roku postavili 28 %, čo je presne 91 km. V tomto roku plánujú postaviť ďalších 33 % z tohto úseku. Koľko kilometrov plánujú postaviť v tomto roku? Pomôže vám Janino znázornenie?

Jana:

Najprv vypočítam, koľko je 1 % z úseku. To bude **28**-krát menej, ako je **28** %.

91 km : 28 = 3,25 km

Potom 33 % bude 33-krát viac ako 1 %:

$33 \cdot 3{,}25$ km = 107,25.

V tomto roku plánujú postaviť 107,25 km.

14 Vyriešte úlohu 13 s tým, že namiesto 91 km bude: a) 98 km, b) 63 km, c) 77 km.

15 Vyriešte úlohu 13 s tým, že namiesto 28 % a 33 % bude: a) 28 % a 40 %, b) 14 % a 33 %, c) 42 % a 36 %.

16 Nájdite podľa vzoru chýbajúce čísla v tabuľkách.

40 %	
60 %	120

→

40 %	80
60 %	120

a)

25 %	
40 %	104

b)

25 %	104
40 %	

c)

25 %	
7 %	104

d)

82 %	410
7 %	

e)

69 %	
32 %	10

f)

125 %	30
44 %	

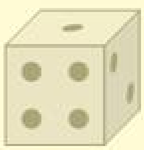
17 Mama prispela na Jožkov bicykel sumou 165 €, čo bolo 60 % ceny bicykla. Koľko eur stál celkovo bicykel?

18 Mama prispela na Jožkov bicykel sumou 90 €, čo bolo 36 % ceny bicykla. Strýko Juraj prispel 30 % z ceny bicykla. Koľkými eurami prispel strýko Juraj? Pomôže ti Janino znázornenie?

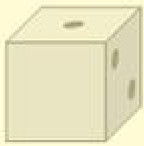
Firma Kocka 2

Určite si spomínate na firmu Kocka, ktorá vyrába neštandardné kocky. Svoj ďalší model firma nazvala LAS VEGAS. Na týchto kockách bol súčet počtu bodiek na jednej dvojici protiľahlých stien 8 a na druhej dvojici 6. Kocky LAS VEGAS sa vyrábali vo dvoch rôznych verziách.

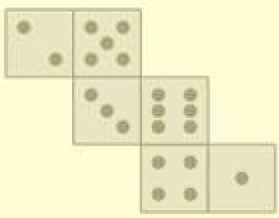
Úloha 1: Na obrázku je jedna z verzií kocky LAS VEGAS. Koľko bodiek je na stenách tejto kocky, ktoré na obrázku nevidno?



Úloha 2: Už sme povedali, že existovala aj druhá verzia kocky LAS VEGAS. Tá mala iný počet bodiek oproti stene s 1 bodkou aj oproti stene s 2 bodkami. Zistite tieto počty.



Úloha 3: Tretí model sa volal REDUTA. Sieť tejto kocky je na obrázku. Aký súčet počtu bodiek na jednotlivých dvojiciach protiľahlých stien má kocka REDUTA?



Koľko je to percent?

Veľmi často sa v bežnom živote stretneme aj s tým, že chceme vypočítať, koľko percent celku tvorí jeho časť.

1 Mama prispela na Jožkov bicykel, ktorý stál 250 €, sumou 145 €. Koľkými percentami z ceny bicykla prispela?

Jana:

1 % .... ?
? % .... 145 €
100 % .... 250 €

Najprv vypočítam, koľko je 1 % z celej sumy, teda z 250 €.
250 € : 100 = 2,5 €.

Teraz na kalkulačke zistím, koľkokrát sa 2,5 nachádza v 145 (teda koľkonásobok čísla 2,5 je číslo 145):
145 : 2,5 = 58
Číslo 145 je 58-krát viac ako 2,5. Suma 2,5 € bola 1 percento, preto 145 € je 58 percent.

Mama prispela 58 % z celej sumy.

Spomínate si, ako zisťoval počet percent Ivan na strane 66?

Ivan:
Hľadať počet percent je to isté, ako hľadať počet stotín.
Ak vypočítam 145 : 250, dostanem 0,58. To je 58 stotín.
Takže to je aj 58 %.

2 Vyriešte úlohu 1 aj ako Jana, aj ako Ivan s tým, že namiesto 250 € bude:
a) 200 €, b) 232 €, c) 464 €.

3 Vyriešte úlohu 1 aj ako Jana aj ako Ivan s tým, že miesto 145 € bude:
a) 150 €, b) 205 €, c) 174,5 €.

! Ak 24 % z 200 je 48, tak číslo 200 voláme **základ**, číslo 24 určuje **počet percent** a číslo 48 voláme **časť základu** prislúchajúcu počtu percent (niekedy ju voláme aj **percentová časť**).

4 Určte, koľko percent zo základu tvorí časť celku. Výsledky zaokrúhlite podľa toho, ako je napísané v tabuľke.

Základ	Časť	Počet percent
200	30,5	nahor na jedno desatinné miesto
65	43	nadol na desatiny percent
1 435	467	na tri platné číslice
830	375	nadol na stotiny percent
445	225	na tisíciny percent
362	746	nahor na celé percentá

Poznámka:
Slovom **časť** niekedy označujeme aj množstvo, ktoré je väčšie ako celok.

Pomocou percent vyjadrujeme aj stúpanie, resp. klesanie cesty alebo kopca. Stúpanie, resp. klesanie 1 % znamená, že na 100 metrov vodorovnej trate stúpneme, resp. klesneme o 1 meter.

5 Aké stúpanie, resp. klesanie v percentách je znázornené na obrázkoch?

a)


b)


c)


d)


e)


f)


6 Ak by stúpanie do kopca bolo presne 100 %, pod akým uhlom by sme kráčali?

7 Nájdite chýbajúce čísla v tabuľkách.

a)

… %	96
40 %	128

b)

40 %	96
… %	128

c)

… %	140
7 %	105

d)

7 %	140
… %	105

e)

… %	12
32 %	10

f)

32 %	12
… %	2,1

g)

… %	412,5
30 %	225

h)

21 %	75,6
… %	540

i)

… %	300
2,5 %	200

8 Jožko mal mať na osemtýždňovej brigáde týždennú mzdu 95 €.

a) Koľko eur Jožko zarobí?

b) Počas brigády niekoľkokrát dostal príplatok 18 % k týždennej mzde. Za koľko týždňov dostal príplatok, keď nakoniec zarobil 811,3 €?

Promile

Okrem percent sa často stretnete aj s inou časťou celku – s promile.

„Neďaleko mesta Field v národnom parku Yoho (Yoho National Park) sú špirálové tunely. Železnica tu prekonáva stúpanie 22 promile dvoma slučkovými tunelmi. Je to miesto, kde možno vidieť vlak ísť ponad, resp. popod seba – stačí, aby mal aspoň 80 až 90 vozňov. Pripomínam, že bežne sa tu dá natrafiť na vlak so 120 vozňami a dĺžka vlaku 1,5 až 2 km nie je ničím výnimočným."

Na obrázku je vlak, pričom vzadu vidno jeho koniec. (autor fotografie © Colin Arnot)

„U nás je vedenie auta pod vplyvom alkoholu zakázané, rovnako ako napríklad v Českej republike, v Maďarsku, Chorvatsku, Rumunsku alebo v Grécku. Snahy vyrovnať sa v množstve povolenej hladiny alkoholu niektorým krajinám u nás našťastie nepreší, pretože obyvatelia Slovenska majú s alkoholom obrovský problém. Navyše v krajinách, kde je napríklad povolené 0,5 promile, sú nižšie rýchlostné limity a jazdí sa vo všeobecnosti pomalšie. Napokon, vo Švajčiarsku pred jeden a pol rokom znížili tolerovanú hladinu alkoholu o 0,3 promile."

(Z tlače 21. 11. 2006)

1 Zistite na internete, čo znamená 1 promile alkoholu v krvi.

Aj vy ste zistili, že 1 promile alkoholu v krvi znamená, že v jednom litri krvi je 1 tisícina, čiže 1 mililiter čistého alkoholu?

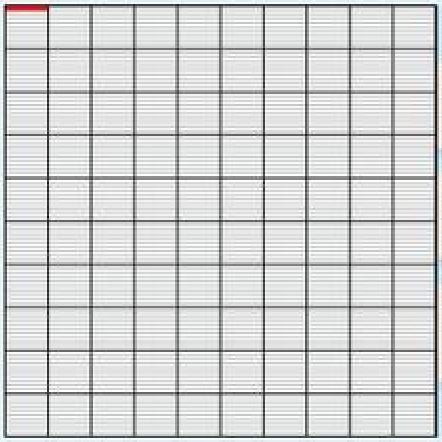
2 Zistite na internete, čo znamená stúpanie alebo klesanie 1 promile. Porovnajte so stúpaním, resp. s klesaním vyjadreným 1 percentom.

Aj vy ste zistili, že stúpanie, resp. klesanie 1 promile znamená, že na 1 kilometer trate táto trať stúpne, resp. klesne o 1 tisícinu kilometra, čiže o 1 meter?

Napr. pri železničnej trati je klesanie 20 ‰ znázornené značkou ako na obrázku:

***Promile** je jedna tisícina celku. Názov promile je odvodený z latinského „per mille“, čo znamená „na každých tisíc“.*
Aj promile má svoju značku:

‰



1‰ je tisícina celku.

Celok – základ je 1 000 ‰.

$\frac{1}{1\,000}$ celku = 0,001 celku = 1 ‰ z celku.

Všimnite si značky % *a* ‰ *:*

1 % z celku = 1 / 100

1 ‰ z celku = 1 / 1 000

3 Správne prečítajte zápisy: 14 ‰, 28 ‰, 50 ‰.

4 Koľko promile z celku je $\frac{49}{56}$ z celku?

Zhoduje sa vaše riešenie s Jurajovým?

Juraj:
Promile je tisícina celku, a preto hľadám, kolko tisícin je $\frac{49}{56}$.

$$\frac{49}{56} = 49 : 56 = 0{,}875$$

Je to 875 tisícin, teda výsledok je 875 ‰.
Hľadanie percent bolo to isté ako hľadanie stotín. Hľadanie promile bude to isté ako hľadanie tisícin.

5 Koľko promile z celku: a) sú $\frac{3}{4}$, b) sú $\frac{2}{5}$, c) sú $\frac{3}{8}$, d) je $\frac{9}{10}$, e) je $\frac{18}{32}$, f) je $\frac{7}{15}$, g) je $\frac{7}{8}$, h) je $\frac{19}{16}$ z celku?

6 a) Koľko tisícin je 57 stotín? Koľko stotín je 645 tisícin?
b) Koľko promile je 57 percent? Koľko percent je 645 promile?

Ak máte s riešením tejto úlohy problémy, skúste použiť Petrove alebo Vierine návody.

Peter:

Petrov návod pre časť a):
Zapíšte si úlohu pomocou zlomkov: $\frac{?}{1\,000} = \frac{57}{100}$, $\frac{?}{100} = \frac{645}{1\,000}$.

Petrov návod pre časť b):
Stačí si uvedomiť, že časť b) je vlastne to isté ako časť a).

Viera:

Vierine návody:
1 % z celku = 10 ‰ z celku 1 ‰ z celku = 0,1 % z celku

7 Koľko percent je:
a) 15 ‰, b) 200 ‰, c) 29 ‰, d) 4,2 ‰?

8 Koľko promile je: a) 15 %, b) 200 %, c) 29 %, d) 4,2 %?

9 Vypočítajte 1 ‰ z: a) 238 700; b) 8 710; c) 106; d) 4,237; e) 0,8.

Ak viete počítať s percentami, počítanie s promile by pre vás nemal byť problém. Je to skoro to isté, len základ nebude 100 %, ale 1 000 ‰. Ukážeme si to na riešeniach dvoch úloh:

10 Koľko je: a) 56 %, b) 56 ‰ zo 120?

Porovnajte riešenia:

a) **1** % je **stotina** zo 120.
120 : 100 = 1,2
Potom **56** % je 56 · 1,2 = 67,2.

b) **1** ‰ je **tisícina** zo 120.
120 : 1 000 = 0,12
Potom **56** ‰ je 56 · 0,12 = 6,72.

11 a) Koľko percent je 77, ak 128 % je 56?
b) Koľko promile je 77, ak 128 ‰ je 56?

Porovnajte riešenia:

a) Jedno **percento** je 56 : 128 = 0,437 5.
77 je potom 77 : 0,437 5 = 176 %.

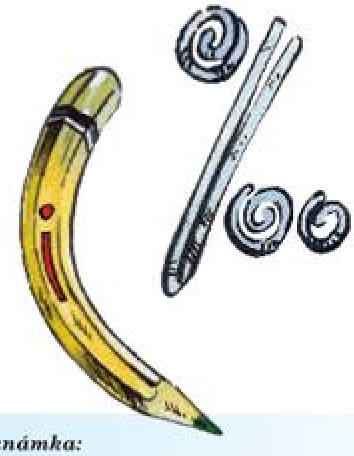
b) Jedno **promile** 56 : 128 = 0,437 5.
77 je potom 77 : 0,437 5 = 176 ‰.

Precvičte si počítanie s promile.

12 Jedno ‰ z neznámeho čísla je: a) 34; b) 7; c) 3,28; d) 0,46; e) 2,831; f) 200. Zistite neznáme číslo.

13 Prekreslite si do zošita tabuľku a vyplňte ju.

Dané číslo	1 ‰ z daného čísla	7 ‰ z daného čísla
450		
1 678		
23 600		
	45	
	167,8	
		16 520
10 000		
	1 000	
203 000		



Poznámka:
7 ‰ z daného čísla je 7-krát viac ako 1 ‰ z daného čísla.

14 Aké stúpanie, resp. klesanie v promile je znázornené na obrázkoch?

15 Prečítajte si text o jednom z najstrmších stúpaní železničnej trate:

„V mieste Big Hill železnica prekonávala stúpanie až 43 ‰. Aby vlaky po tomto stúpaní vyšli, resp. aby ho ubrzdili, potrebovali v rokoch 1884 až 1909 na 10 osobných vozňov až 3 parné lokomotívy."

Určte, aký by bol na tejto trati výškový rozdiel, ak sa vo vodorovnom smere posunieme: a) o 1 km, b) o 3 km, c) o 10 km.

16 To, že pitie alkoholu je nebezpečné a zdraviu škodlivé, isto viete. Nájdite na internete, ako sa mení správanie človeka podľa množstva promile alkoholu v krvi. Pomocou kalkulačky na výpočet promile alkoholu v krvi určte, koľko:
a) pollitrových pív, b) dl vína, c) pohárikov destilátu stačí na to, aby sa dospelý človek vystavil životu nebezpečnej otrave alkoholom.

Percentá a zaokrúhľovanie

V živote nie je vždy možné vyjadrovať sa úplne presne. Často to nie je ani potrebné. Preto sa aj v niektorých situáciách, v ktorých vystupujú percentá, často počíta „nepresne“ – zaokrúhľuje sa. Na niektoré z nich sa pozrime spoločne.

Dane

Každý občan Slovenskej republiky, ktorý mal nejaký zisk či zárobok, platí z tohto príjmu štátu daň. To, z akých príjmov a aké veľké dane sa platia, upravuje množstvo zákonov.
Jedna z daní, ktorá sa odvádza štátu, je daň z príjmu, ktorý bol vykonávaný na základe dohody o vykonaní práce. Veľkosť dane (odborne nazývaná sadzba) bola do konca roku 2010 zákonom stanovená na 19 % z príjmu.

1 Určte, akú daň zaplatila Beáta, ak mala uzavretú dohodu o vykonaní práce na a) 100 €, b) 54 €, c) 87,50 €. Koľko peňazí jej prišlo na účet?

Porovnajte svoje riešenie časti c) predchádzajúcej úlohy s Jurajovým:

Juraj:
Daň z príjmu je 19 %. Preto musím vypočítať 19 % z 87,50 €.
To je ľahké: Najskôr vypočítam 1 %:
87,50 € : 100 = 0,875 €.
19 % je 19-krát viac:
0,875 € · 19 = 16,625 €.
To je 16 eur a 62,5 centa. Pol centa však neexistuje. Preto musím výsledok nejako zaokrúhliť. Ale ako? Na centy alebo na eurá? A nahor, nadol alebo matematicky? Musím to nájsť na internete.

2 Nájdite na internete, ako sa zaokrúhľuje daň z príjmu pri dohode o vykonaní práce.

Daň z príjmu z dohody o vykonaní práce sa zaokrúhľuje na celé centy nadol. Preto správna odpoveď v časti c) úlohy 1 je, že daň z príjmu bola 16,62 € a na účet prišlo Beáte 70,88 €. Takéto zaokrúhľovanie sa ľahko pamätá, pretože je výhodné pre občana a nie je výhodné pre štát.

3 Určte, akú daň z príjmu zaplatí pán Arnold, ak mal uzavretú dohodu o vykonaní práce na a) 47,50 €, b) 92,30 €, c) 134,86 €. Koľko peňazí mu prišlo na účet?

4 Pani Eve prišlo na účet za dohodu o vykonaní práce a) 81 €, b) 162 €, c) 52,65 €. Na akú sumu mala pani Eva uzavretú dohodu o vykonaní práce?

5 Peter tvrdí, že v časti a) úlohy 4 nemusel byť správny výsledok 100 €, ale napr. 99,99 €. Skontrolujte, že Peter má pravdu.

6 Nájdite inú sumu ako 200 €, z ktorej by pani Eva po odpočítaní daní dostala na účet 162 €.

7 V roku 2011 sa uvažovalo o zvýšení sadzby dane z príjmu pri dohode o vykonaní práce z 19 % na 20 %. Určte, akú daň by zaplatil pán Arnold zo svojich príjmov pri tejto zvýšenej sadzbe dane. O koľko viac by zaplatil?

8 Soňa pri výpočte, o koľko viac by zaplatil pán Arnold, počítala takto:

Soňa:
Predtým bola sadzba dane 19 %, potom ju zvýšili na 20 %. Rozdiel je 1 %. Takže stačí, keď určím 1 % z príjmu pána Arnolda a zaokrúhlim ho nadol. Dostanem výsledky:
a) 0,47 €, b) 0,92 €, c) 1,34 €.

Prečo Soni nevyšli správne výsledky?

9 Diskutujte o tom, prečo sa platia dane. Čo sa z nich platí? Je 19 % z príjmu podľa vás veľa alebo málo? Vedeli ste, že kedysi sa namiesto daní platili cirkevné či svetské desiatky (desatiny)? Viete o tom, že okrem daní sa platia aj odvody? Viete, na čo slúžia? Opýtajte sa svojich rodičov alebo nájdite informácie na internete.
Pripravte na túto tému prezentáciu.

Miera nezamestnanosti 2

Najprv si prečítajte úvod k rubrike *Miera nezamestnanosti 1*, ktorý je na strane 67. Nasledujúce úlohy súvisia s diagramami uvedenými na str. 67.

Úloha 1: Peter sa pozrel na prvý diagram a povedal: „V Košickom kraji bolo skoro dvakrát viac nezamestnaných ako v Trnavskom kraji." Má pravdu? Svoje tvrdenie vysvetlite.

Úloha 2: Z údajov v diagramoch možno vypočítať, koľko práceschopných obyvateľov bolo na Slovensku v marci 2004. Uvedené údaje sú zaokrúhlené, preto to vieme zistiť len približne. Vieme vypočítať iba to, koľko najmenej a koľko najviac mohlo byť vtedy na Slovensku práceschopných obyvateľov. Zistite to.

Úroky

Keď si uložíme peniaze do banky, ako odmenu od nej dostávame tzv. ***úroky****.*
Úroková miera *vyjadruje, koľko % z uložených peňazí nám banka zaplatí za to, že v nej máme uložené peniaze. Suma, z ktorej počítame úrok, sa volá* ***istina****.*
Nie vždy však úroky dostávame. Niekedy ich platíme my. Napríklad ak niekto mešká s platbou, platí tzv. úrok z omeškania. Úrok platíme aj vtedy, ak si peniaze od banky požičiame.
Úroky, ktoré nám platí banka, sa niekedy zaokrúhľujú na celé centy nahor.

3 % p. a. = ročný úrok 3 percentá
(p. a. = per annum = za rok)

1 Pani Anna mala v banke celý rok uložené peniaze. Vedela, že za tieto peniaze dostane od banky úrok vo výške 1,5 % p. a. z uloženej sumy. Určte, aký úrok dostane pani Anna, ak mala v banke uložených: a) 150 €, b) 345,50 €, c) 1 467,30 €, d) 12 350 €. Nezabudnite, že úroky sa zaokrúhľujú na celé centy nahor.

2 Prekreslite si do zošita tabuľku a vyplňte ju.

Uložená suma	13 000 €	3 450 €	7 832 €	530 €	862,4 €	703,12 €	8 137 €
Úroková miera	0,1 %	0,3 %	0,49 %	1,29 %	2,4 %	2,99 %	4,99 %
Úrok							

Ak si peniaze ani úrok nevyberiete, úrok vám pripíšu – pridajú – k uloženým peniazom.

3 Pri úrokovej miere 2,5 % mi pripísali úrok presne 82,5 €. Aká bola istina?

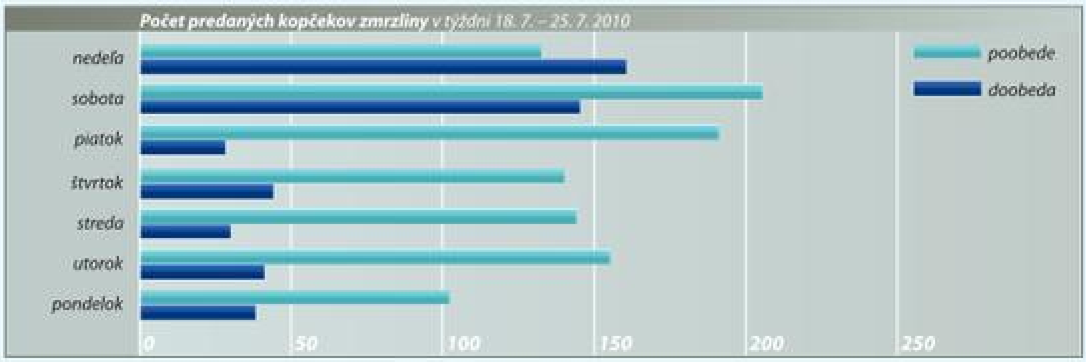
4 Pani Anna mala 1 000 € uložených v banke 2 roky. Úroková miera bola 2 % p. a.
a) Koľko eur mala pani Anna na účte v banke po prvom roku sporenia?
b) Koľko eur mala pani Anna na účte po dvoch rokoch sporenia?
c) O koľko percent celkovo sa zvýšili úspory pani Anny v banke za 2 roky?
Pozor, správna odpoveď nie je 4 %.

5 V skutočnosti by úroky, ktoré dostala pani Anna, aj tie, ktoré boli napísané v tabuľke v úlohe 2, boli nižšie. Keďže úroky sú príjem, aj z nich sa platí daň. Vypočítajte skutočnú výšku úrokov, ktorá by bola pripísaná k istine, v úlohe 1 a 2. Počítajte so sadzbou dane 19 %. Nezabudnite, že úrok sa zaokrúhľuje na celé centy nahor a daň na celé centy nadol.

Diagramy

Začneme úlohou, v ktorej sú niektoré údaje vyjadrené obrázkom. Vyriešte ju v skupinách.

1 Na obrázku vidíte grafický záznam o predaji zmrzliny v zmrzlinovom stánku počas jedného týždňa.



Odpovedzte na otázky:

a) V ktorých dňoch sa v tomto stánku predalo viac zmrzliny doobeda ako poobede?
b) V ktorý deň sa predalo doobeda najviac a v ktorý deň najmenej zmrzliny?
c) V ktorý deň sa predalo poobede najviac a v ktorý deň najmenej zmrzliny?
d) V ktorý deň sa predalo najmenej zmrzliny a v ktorý deň najviac zmrzliny?
e) Predalo sa v priemere viac zmrzliny doobeda alebo poobede?
f) Predávala sa zmrzlina lepšie v pracovných dňoch (po – pi) alebo cez víkend?

V bežnom živote sa často stretnete s tým, že údaje (väčšinou vyjadrené percentami) sú znázornené graficky – obrázkom. Je to prehľadnejšie ako text. V dobrých obrázkoch sa dá ľahko orientovať. Na niektoré druhy týchto obrázkov – diagramov – sa teraz pozrieme podrobnejšie.

Miera nezamestnanosti 3

Najprv si prečítajte úvod k rubrike *Miera nezamestnanosti 1*, ktorý je na strane 67. Nasledujúce úlohy súvisia s diagramami uvedenými na str. 67.

Úloha 1: Milan chcel zistiť, aká miera nezamestnanosti bola v roku 2004 na východnom Slovensku (Košický a Prešovský kraj spolu). Mal to veľmi rýchlo. Vypočítal aritmetický priemer mier nezamestnaností v Košickom a Prešovskom kraji:

$(20{,}95 + 22{,}90) : 2 = 21{,}925$ (%).

Myslíte si, že jeho výsledok je správny? Svoje tvrdenie vysvetlite.

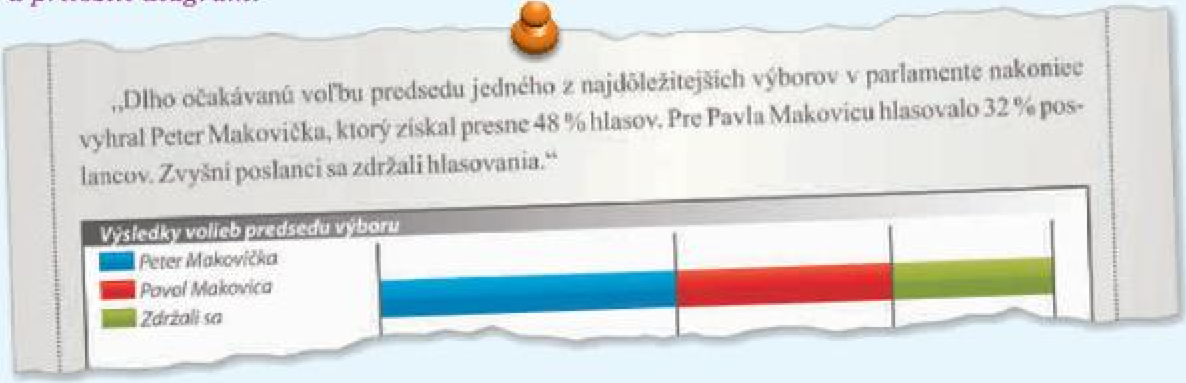
Úloha 2: Kedy by bol Milanov výpočet správny?

Úloha 3: Redaktor televízie povedal v správach: „Od marca 2003 do marca 2004 si našlo prácu 0,5 percenta nezamestnaných." Mal pravdu? Svoje tvrdenie vysvetlite.

Obdĺžnikový, riadkový a stĺpcový diagram

Voľby v parlamente

P *oslanci v našom parlamente sú rozdelení do výborov podľa svojej odbornosti – školský výbor, zdravotnícky výbor, výbor pre životné prostredie...*
V parlamente volili predsedu jedného z výborov. V novinách o tom napísali správu a priložili diagram.


„Dlho očakávanú voľbu predsedu jedného z najdôležitejších výborov v parlamente nakoniec vyhral Peter Makovička, ktorý získal presne 48 % hlasov. Pre Pavla Makovicu hlasovalo 32 % poslancov. Zvyšní poslanci sa zdržali hlasovania."

1 Na obrázku je výsledok volieb znázornený v **obdĺžnikovom** diagrame.
a) Akej farby je obdĺžnik, ktorý „patrí" Pavlovi Makovicovi?
b) Čo znázorňuje zelený obdĺžnik?
c) Na základe tohto diagramu určte, kto získal viac hlasov – Peter alebo Pavol? Svoje odpovede vysvetlite.

Milanovi sa to, čo videl v novinách, nepozdávalo. Zobral si pravítko a začal merať, počítať a potom vyhlásil: „Noviny sa pomýlili. Buď nie sú dobré čísla, alebo je zlá dĺžka obdĺžnikov v diagrame. Alebo žeby oboje?"

2 Presvedčte sa, že Milan má pravdu.

Nazrime teraz do Milanovho zošita:

Milan:

Čísla: $48 : 32 = 1{,}5$
Meranie: Peter M. – 4,4 cm Pavol M. – 3,2 cm
$4{,}4 : 3{,}2 = 1{,}375$
$1{,}5 \neq 1{,}375$
Preto to nie je dobre.

3 Vysvetlite Milanove poznámky v zošite.

4 Predpokladajte, že čísla v správe boli dobré. Urobte správny obdĺžnikový diagram zodpovedajúci číslam v správe. Koľko centimetrov budú merať jednotlivé časti, ak celý diagram má merať 10 cm?

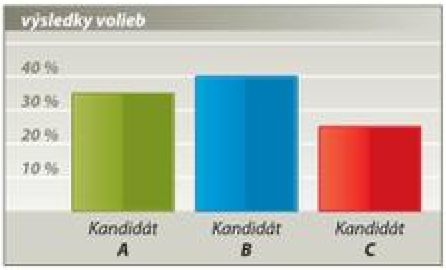
5 Výsledky volieb sú znázornené obdĺžnikovým diagramom horizontálne (naležato). Narysujte tento obdĺžnikový diagram vertikálne (nastojato).

6 Predpokladajte, že v článku bol správny obdĺžnikový diagram. Opravte čísla uvedené v článku.

Koľkokrát viac percent, toľkokrát dlhší obdĺžnik v diagrame.

7 Na obrázku sú výsledky iných volieb znázornené v **stĺpcovom** a **riadkovom** diagrame. Meraním zistite, koľko percent hlasov získali jednotliví kandidáti.

a)



b)

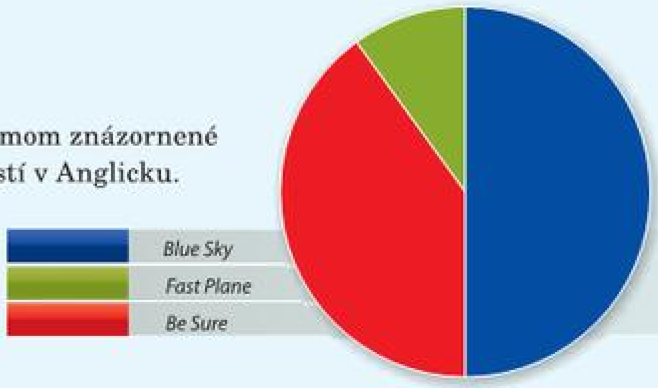
8 Narysujte jeden a) obdĺžnikový, b) riadkový, c) stĺpcový diagram pre podobné hlasovanie, tentoraz s tromi kandidátmi. Kandidát A získal 30 % všetkých hlasov, kandidát B získal 22 % a kandidát C presne 38 % hlasov. Zvyšní poslanci sa zdržali hlasovania.

Kruhový diagram

*Ďalším často používaným typom diagramu je **kruhový** diagram.*

Zisky leteckých spoločností v Anglicku

1 Na obrázku je **kruhovým** diagramom znázornené rozdelenie ziskov istých spoločností v Anglicku. Meraním (viete, čo máte merať?) a výpočtami zistite, koľko percent získali jednotlivé spoločnosti.



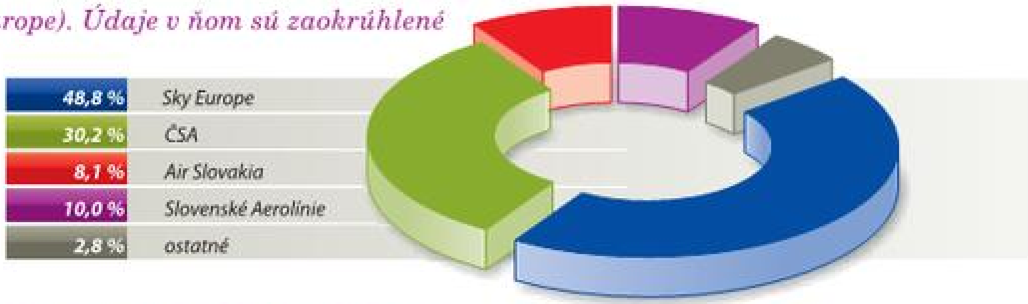
Počítali ste tak ako Anna?

Anna:
Merala som veľkosti uhlov, ktoré prislúchajú jednotlivým častiam. Ak som merala správne, tak spoločnosti Blue Sky patrí polovica kruhu (180°), spoločnosti Fast Plane pripadlo 36° z celého kruhu a Be Sure 144°. Preto zisk Blue Sky bola polovica, čiže 50 %. Fast Plane zaberá 36° z 360°, čo je 10 %. Zvyšných 40 % pripadá na Be Sure.

2 Narysujte kruhový diagram pre zisky:
a) 60 %, 30 % a 10 %, b) 20 %, 35 % a 45 %, c) 10 %, 35 % a 60 %.

Zisky leteckých spoločností na Slovensku

Celkový zisk leteckých spoločností z pravidelných liniek na letisku v Bratislave bol v roku 2004 (po zaokrúhlení na celé milióny) 130 miliónov korún. Podiely jednotlivých leteckých spoločností na celkovom zisku zobrazuje graf (zdroj: Sky Europe). Údaje v ňom sú zaokrúhlené na desatiny percenta.



Precvičte si počítanie so zaokrúhlenými číslami.
Na základe údajov uvedených v texte a v tabuľke riešte nasledujúce úlohy:

3 Aký mohol byť najväčší celkový zisk leteckých spoločností v celých korunách?

4 Najmenej koľko percent z celého zisku mohla získať:
a) spoločnosť ČSA, b) spoločnosť Slovenské aerolínie?

5 Koľko by mal byť súčet počtov percent v diagrame? Prečo? Ako je možné, že súčet počtov percent v našom diagrame nie je 100? Svoju odpoveď zdôvodnite.

6 Narysujte čo najpresnejšie kruhový diagram, ktorý vyjadruje zisky leteckých spoločností z pravidelných liniek na letisku v Bratislave v roku 2004.

7 Tri najsilnejšie spoločnosti mali dohromady zisk necelých 116 miliónov korún. Narysujte čo najpresnejšie kruhový diagram, ktorý vyjadruje, ako si týchto takmer 116 miliónov rozdelili tri najsilnejšie spoločnosti.

Precvičte si počítanie s percentami a s promile

Vyskúšajte si, či dobre ovládate základné výpočty s percentami. Potrebné výpočty robte na kalkulačke.

1 Prekreslite si tabuľku do zošita a doplňte ju.

Základ	300	250		0,1		1,08
Časť	60		64	0,018	3,45	
Počet percent		13 %	32 %		150 %	11 %

2 Vyjadrite v percentách a znázornite obdĺžnikovým diagramom:
a) Zo 467 žiakov školy je 212 dievčat a 255 chlapcov.
b) Z každých 20 hráčov dostal jeden žltú kartu.
c) Chrípku dostalo 12 z 27 žiakov.

3 Krv tvorí približne 8,2 % hmotnosti človeka. Približne koľko kg krvi má dospelý muž, ktorý váži 77 kg? Koľko približne váži tvoja krv?

4 Karol urobil v diktáte so 60 slovami chybu v 15 % slov. V koľkých slovách mal Karol chybu?

5 Prekreslite si tabuľku do zošita a doplňte ju.

Základ	6,8	3,75		2 300		23 500
Časť		0,3	6,4	115	0,51	
Počet promile	2 ‰		3,2 ‰		17 ‰	20,5 ‰

6 Stúpanie na trase, po ktorej jazdí metro v Lausanne vo Švajčiarsku, je až 12 %. Teda na 100 m vodorovnej vzdialenosti trať stúpne o 12 m. Aká veľká by musela byť vodorovná vzdialenosť, aby sme pri tomto stúpaní vystúpili presne o 100 metrov?

7 Vyriešte úlohu 6 s tým, že stúpanie by bolo 12 ‰.

8 Kilogram jedného druhu bronzu obsahuje 170 g olova a 110 g cínu. Zvyšok je meď. Určte, koľko percent olova, cínu a medi tento bronz obsahuje. Údaje znázornite kruhovým diagramom.

9 Koľko percent času od začiatku prvej do konca poslednej hodiny tvoria prestávky? Je to každý deň rovnako?

10 Dedko s babkou nazbierali 1,82 kg dubákov. Po odparení všetkej vody vážili 145 gramov. Koľko percent vody obsahovali?

11 Keď má Samo vypočítať z nejakého čísla 50 %, namiesto výpočtu pomocou 1 % jednoducho dané číslo vydelí dvoma. Veď 50 % je polovica.
Vymyslite podobný návod na výpočet: a) 10 %, b) 20 %, c) 25 %.

12 V zmiešanom háji je 1 200 stromov, z toho je 55 % listnatých a zvyšné sú ihličnaté. Skoro na jar vyrúbali 35 % a) stromov, b) listnatých stromov, c) ihličnatých stromov. Najskôr bez počítania odhadnite, v ktorom z týchto troch prípadov zostalo najviac a v ktorom najmenej stromov. Viete to zdôvodniť aj bez výpočtu? Potom zistite výpočtom, koľko stromov má teraz tento háj.

13 Prečítajte si článok z novín. Potom odpovedzte na nasledujúce otázky:
- Koľko percent študentov zo všetkých uchádzačov prijmú na všeobecné lekárstvo?
- Koľko percent prijmú na ošetrovateľstvo, koľko na pôrodnú asistenciu a koľko na verejné zdravotníctvo?

Výsledky zaokrúhlite na celé percentá.

> Na všeobecné lekárstvo sa chce dostať až 1 127 študentov, prijmú však len stovku. Na ošetrovateľstvo sa hlási 76 študentov, na pôrodnú asistenciu 29 a na verejné zdravotníctvo 55 študentov. „Tam je šanca na prijatie vyššia, **na každý smer prijmeme po 20 študentov**," povedal prodekan fakulty.
>
> *(Z tlače 23. 4. 2010)*

14 Skontrolujte, či sú údaje v nadpise článku v súlade s údajmi v texte.

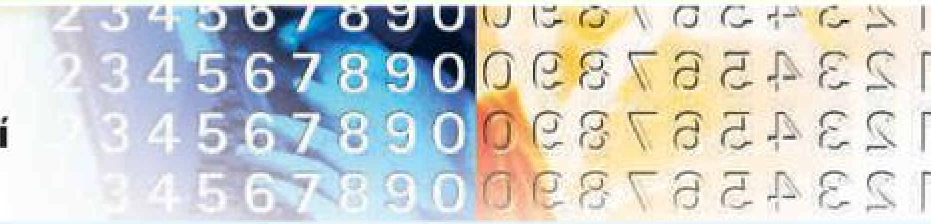
> **V roku 2050 bude každý piaty Európan moslimom**
> Nízka pôrodnosť Európanov a nárast počtu migrantov, najmä moslimov, zásadne zmení európsku kultúru a spoločnosť. Americký Inštitút pre politiku migrácie uvádza, že do roku 2050 bude v Európe 20 percent vyznávačov islamu.
>
> *(Z tlače 10. 8. 2009)*

15 V novinách napísali: *Približne v každom trinástom manželstve, teda v 13 % zo všetkých manželstiev, chcú mať manželia ešte aspoň dve deti.*
Môžu byť farebne vyznačené údaje správne? Ak áno, vysvetlite. Ak nie, opravte jeden z nich.

16 Máme 1 500 gramov 7,2-percentného roztoku kuchynskej soli vo vode (t. j. roztok váži 1 500 g a 7,2 % z 1 500 g tvorí soľ, zvyšok je voda). Varením tohto roztoku sa odparí časť vody a zostane 1 200 gramov nového roztoku. Koľkopercentný bude tento nový roztok?

17 Čerstvé huby obsahujú 90 % vody, sušené už len 20 %. Koľko kg sušených húb dostaneme z 10 kg čerstvých?

11 KOMBINATORIKA III



Keď je možností priveľa

*S*ystematické vypisovanie možností je výborný spôsob, ako nezabudnúť ani na jednu z možností a ako zistiť ich presný počet. Niekedy je však možností veľmi veľa. Vtedy by vypisovanie mohlo trvať príliš dlho, mohlo by byť neprehľadné alebo by sme na nejakú možnosť mohli zabudnúť. Pozrime sa, ako si pri niektorých problémových situáciách môžeme pomôcť aj bez vypisovania všetkých možností. Pomôže nám, ak si predstavíme, ako by sme úlohu riešili pomocou systematického zápisu.*

Stolnotenisový turnaj

Dlhodobý stolnotenisový turnaj sa hrá systémom každý s každým jeden zápas. Do súťaže sa zatiaľ prihlásilo 18 dievčat. Keby ste mali vypisovaním zistiť, koľko zápasov sa spolu odohrá, dalo by vám to zabrať. Je to totiž až 153 zápasov.

1 Do súťaže sa prihlásilo ďalšie dievča. Koľko zápasov sa počas turnaja odohrá, keď je v turnaji 19 dievčat?

Pozrite, ako túto úlohu riešila Kamila:

Kamila:
Stačí mi zistiť, kolko zápasov odohrá novoprihlásené dievča. Tých zápasov je 18 – s každým dievčaťom, ktoré bolo prihlásené už predtým.
$153 + 18 = 171$
Počas turnaja sa teraz odohrá 171 zápasov.

2 Na ďalší deň sa prihlásili ešte dve sestry. Koľko zápasov pribudne v turnaji?

3 V Kamilinom zošite je pri riešení predchádzajúcej úlohy takýto zápis: $171 + 19 + 20 = 210$. Prezradíme vám, že Kamilino riešenie je správne. Vysvetlite Kamilin zápis.

4 Nakoniec sa prihlásilo celkom 24 dievčat. Koľko zápasov sa počas turnaja odohrá?

5 Do podobného turnaja chlapcov sa prihlásilo len: a) 17, b) 16, c) 15 chlapcov. Koľko zápasov sa odohrá v chlapčenskom turnaji?

6 Ešte raz nahliadneme do Kamilinho zošita. Pre časť a) úlohy 5 má takýto výpočet: 153 – 17 = 136. Výsledok je správny. Vysvetlite Kamilin výpočet.

7 Kamila tvrdí, že pre zmiešaný turnaj chlapcov a dievčat so 41 hráčmi sa počet zápasov dá vypočítať takto:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ... + 37 + 38 + 39 + 40

a) Aký sčítanec je tesne pred číslom 37?
b) Koľko sčítancov je v tomto príklade?
c) Vypočítajte uvedený súčet.

Kto pôjde po minerálky

V triede je 12 chlapcov a 16 dievčat. Treba vybrať dvoch, ktorí skočia do školského bufetu po minerálky. Minerálky sú ťažké, a preto po ne môžu ísť buď dvaja chlapci, alebo dievča s chlapcom (čiže nie dve dievčatá). Keby ste mali zistiť vypisovaním, koľko je možností výberu dvojice, dalo by vám to zabrať.
Je to až 258 možností.

1 Z 12 chlapcov chýba jeden, dievčatá sú všetky. Koľko je teraz možností výberu dvojice, ktorá pôjde po minerálky?

Pozrite, ako túto úlohu riešil Milan:

Milan:
Stačí mi zistiť, koľko dvojíc by bolo s chlapcom, ktorý chýba.
A tých je 27 – všetci jeho spolužiaci.
258 – 27 = 231
Teraz je 231 možností.

2 Je Milanovo riešenie správne?

3 Okrem jedného chlapca teraz chýba aj jedno dievča. Koľko je teraz možností?

4 Ak by sme pozreli do Milanovho zošita, našli by sme tam tento výpočet: 231 – 11 = 220. Prečo Milan odpočítal 11, keď všetkých prítomných spolužiakov bolo v triede ešte 26?

5 Koľko by bolo možných dvojíc, ktoré môžu ísť po minerálku, ak by z pôvodných 12 chlapcov a 16 dievčat chýbali traja chlapci?

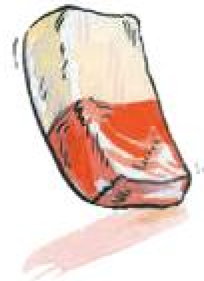
6 Žiaci mali zistiť, koľko by bolo možných dvojíc, ktoré môžu ísť po minerálku, keby z pôvodných 12 chlapcov a 16 dievčat chýbali dve dievčatá. Viktória si zapísala: 258 – 12 – 11 = 235. Je jej riešenie správne?

7 Koľko by bolo možných dvojíc, ktoré môžu ísť po minerálku, ak by z pôvodných 12 chlapcov a 16 dievčat chýbali tri dievčatá?

8 Koľko by bolo možných dvojíc, ktoré môžu ísť po minerálku, keby z pôvodných 12 chlapcov a 16 dievčat chýbali dvaja chlapci a jedno dievča?

9 Koľko by bolo možných dvojíc, ktoré môžu ísť po minerálku, ak by z pôvodných 12 chlapcov a 16 dievčat chýbali dvaja chlapci a dve dievčatá?

10 Pozrime sa do zošitov Kamily a Milana na riešenie predchádzajúcej úlohy:
Kamila: 258 – 12 – 12 – 25 – 24 = 185
Milan: 258 – 27 – 26 – 10 – 10 = 185
Obidva uvedené postupy sú správne. Vysvetlite ich.



Učíme sa na chybách druhých (aj na vlastných)

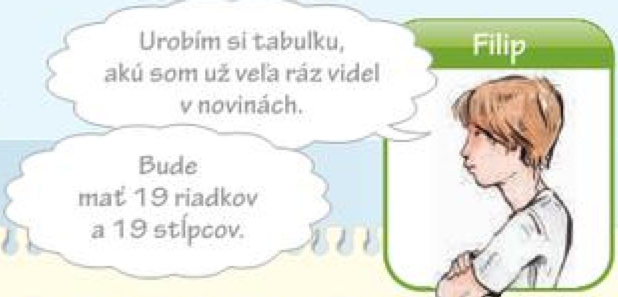
Ak urobíte chybu v teste, v písomke alebo na prijímacích pohovoroch, nie je to nič príjemné. V škole na hodine sa však chyby dajú využiť na to, aby ste učivu lepšie porozumeli. Viete o tom, že aj na niektoré významné objavy prišli ľudia iba vďaka chybe?

1 Nájdite na internete, na ktoré objavy prišli ľudia v podstate vďaka chybe.

Žiaci v škole riešili túto úlohu: Koľko zápasov sa odohrá na turnaji, kde hrá 18 družstiev systémom každý s každým práve jeden zápas?

2 Vyriešte túto úlohu.

Aj Filip riešil túto úlohu. V jeho zošite bolo toto „šikovné“ riešenie:

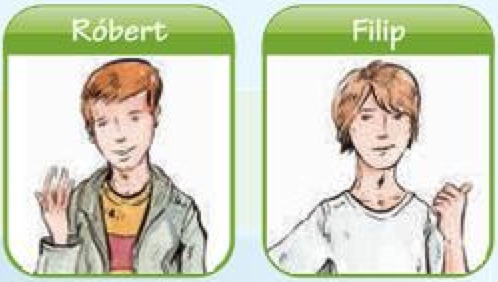


Filip:

Všetkých voľných políčok v tabuľke je 18 · 18 = 324. Každý zápas je v tabuľke zapísaný dvakrát, preto celkový počet zápasov je 324 : 2 = 162.

3 Čo poviete na Filipovo riešenie? Svoju odpoveď vysvetlite.

Pozrite sa na to, čo spôsobilo Filipovo riešenie medzi jeho spolužiakmi v triede.



Róbert:
Ako by si to počítal, keby tam nebolo 18 mužstiev, ale 19?

Filip:
To je ľahké: $19 \cdot 19 = 361$ a $361 : 2 = 180{,}5$

Róbert:
Už sa teším na ten polzápas!

Zuzana:
Ja som to počítala po starom:
$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 15 + 16 + 17 = 153.$
Filip, musel si zarátať nejaké neexistujúce zápasy.
Alebo si niektoré zarátal viackrát.

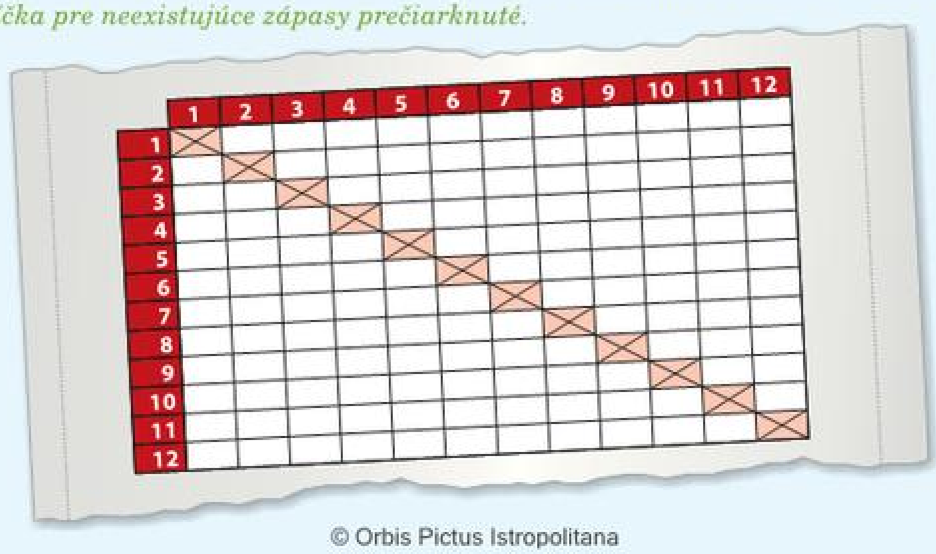
4 Ktoré neexistujúce zápasy zarátal Filip?

Filip:
Už mi je to jasné. Zarátal som aj neexistujúce zápasy mužstiev samých so sebou. Veď predsa mužstvo číslo 3 nehrá s mužstvom číslo 3.
Tu je môj zlepšený postup pre turnaj s 18 aj s 19 mužstvami:

18 mužstiev:	$18 \cdot 18 = 324$	$324 - 18 = 306$	$306 : 2 = 153$
19 mužstiev:	$19 \cdot 19 = 361$	$361 - 19 = 342$	$342 : 2 = 171.$

5 Vysvetlite Filipov zlepšený a už správny postup.

Správnosť Filipovho postupu môžete vidieť aj na tabuľkách v novinách, kde sú políčka pre neexistujúce zápasy prečiarknuté.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X											
2		X										
3			X									
4				X								
5					X							
6						X						
7							X					
8								X				
9									X			
10										X		
11											X	
12												X

6 Použite Filipov zlepšený postup na podobný turnaj so 44 hráčmi.

Videli ste, že hoci sa Filip najprv pomýlil, napokon jeho nápad pomohol všetkým počítať rýchlejšie.

7 Na oslave sa zúčastnilo 10 osôb. Každý s každým si raz štrngol na prípitok. Koľko bolo všetkých štrngnutí?

8 Koľko strán a uhlopriečok spolu má pravidelný desaťuholník?

9 Kde urobil Tomáš chybu pri riešení úlohy 8?

Tomáš:
Namiesto rysovania budem počítať.
Z každého vrcholu vychádza 9 úsečiek – 2 strany a 7 uhlopriečok. Keďže vrcholov je 10, strán a uhlopriečok bude spolu $10 \cdot 9 = 90$.

10 Koľkými spôsobmi sa dá z piatich žiakov vybrať predseda a podpredseda?

11 Kde urobila Zlatica chybu pri riešení úlohy 10?

Zlatica:
Ja som si deti označila A, B, C, D, E a všetko som si pekne vypísala:
AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.
Takže je 10 možností.

Precvičte si všetko, čo ste sa zatiaľ z kombinatoriky naučili.

12 Koľko je trojciferných čísel? Koľko prirodzených čísel má vo svojom zápise najviac tri cifry?

13 Milan si povedal, že na svoje 5-ciferné heslo použije len číslicu 4 alebo číslicu 8. Koľko má možností?

14 Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť: a) 20, b) 24, c) 33 rovnakých jabĺčok medzi Janka a Marienku?

15 Koľkými spôsobmi sa dajú rozdeliť 2 rovnaké jabĺčka a: a) 3, b) 4, c) 5 rovnakých hrušiek medzi Janka a Marienku?

16 Koľkými spôsobmi sa dajú rozdeliť 4 rovnaké hrušky medzi Janka, Marienku a ježibabu?

POMER, MIERKA MAPY A PLÁNU 12

V živote sa často stretnete s tým, že potrebujete niečo rozdeliť na menšie časti, ktoré nemusia byť vždy rovnako veľké.

Ako rozdeliť odmenu?

Skôr ako si povieme niečo o pomere, vyriešte v skupinách prvé dve úlohy.

1 Pani Helena potrebovala vykopať kanál k prípojke na vodu. Dohodla sa s dvoma robotníkmi, že za vykopanie kanála, ktorý je 20 m dlhý, dostanú spolu 100 €. Ako si majú tieto peniaze robotníci rozdeliť, keď prvý robotník vykopal časť dlhú 12 m a druhý robotník zvyšok?

2 Suseda pani Heleny, pani Jana, potrebovala vykopať až 30 m dlhý kanál k prípojke na vodu. Dohodla sa s dvoma robotníkmi, že za vykopanie kanála dostanú spolu 150 €. Ako si majú tieto peniaze robotníci rozdeliť, keď prvý robotník pracoval 16 hodín a druhý 9 hodín?

Porovnajte svoje riešenie úlohy 1 s Dominikovým riešením a riešenie úlohy 2 s Boženiným riešením.

Dominik:
Najskôr som zistil, koľko vlastne platila pani Helena za vykopanie 1 metra kanála: 100 € : 20 = 5 €.
Potom som rozdeľoval podľa toho, koľko metrov kto vykopal. Preto prvý robotník, ktorý vykopal **12** metrov, by mal dostať **12** · 5 € = 60 € a druhý zvyšok, teda **8** · 5 € = 40 €.

Božena:
Najskôr som zistila, koľko eur vychádza za 1 hodinu kopania:
16 hod. + 9 hod. = 25 hod., 150 € : 25 = 6 €.
Potom som robotníkom rozdeľovala podľa toho, ako dlho na kopaní pracovali. Preto prvý robotník, ktorý pracoval **16** hodín, by mal dostať **16** · 6 € = 96 € a druhý 9 · 6 € = 54 €.

Obe úlohy teraz doplníme o ďalšie údaje.

3 Informácie z úlohy 1 teraz rozšírime: Ako si majú robotníci rozdeliť 100 €, keď prvý robotník vykopal časť dlhú 12 m a druhý robotník zvyšok **a každý z nich svoju časť kopal rovnako dlho?** Vyriešte takto doplnenú úlohu Boženiným spôsobom.

4 Informácie z úlohy 2 teraz rozšírime: Ako si majú robotníci rozdeliť 150 €, keď prvý robotník pracoval 16 hodín a druhý 9 hodín **a každý z nich vykopal za tento čas polovicu kanála?** Vyriešte takto doplnenú úlohu Dominikovým spôsobom.

Informácie z úloh 3 a 4 ešte raz rozšírime.

5 Pani Helena potrebovala vykopať kanál k prípojke na vodu. Dohodla sa s dvoma robotníkmi, že za vykopanie kanála, ktorý je 20 m dlhý, dostanú spolu 100 €. Ako si majú tieto peniaze robotníci rozdeliť, keď prvý robotník vykopal časť dlhú 12 m a druhý robotník zvyšok a každý z nich svoju časť kopal rovnako dlho? Obaja robotníci sú rovnako šikovní.

6 Suseda pani Heleny, pani Jana, potrebovala vykopať až 30 m dlhý kanál k prípojke na vodu. Dohodla sa s dvoma robotníkmi, že za vykopanie kanála dostanú spolu 150 €. Ako si majú tieto peniaze robotníci rozdeliť, keď prvý robotník pracoval 16 hodín a druhý 9 hodín a každý z nich vykopal za tento čas polovicu kanála? Obaja robotníci sú rovnako šikovní.

7
a) Pokúste sa vysvetliť, ako je možné, že v úlohe 5 sú obaja robotníci rovnako šikovní, pracovali rovnako dlho a napriek tomu jeden z nich vykopal dlhšiu časť kanála ako ten druhý.
b) Pokúste sa vysvetliť, ako je možné, že v úlohe 6 sú obaja robotníci rovnako šikovní, vykopali rovnako dlhú časť kanála a napriek tomu jeden z nich ju kopal dlhšie ako ten druhý.

Aj vám sa zdá spravodlivé, že ak sú obaja robotníci rovnako šikovní, tak by mali byť hodnotení podľa času, ktorý pracovali? No len za predpokladu, že obidvaja pracovali rovnako intenzívne. Potom je jasné, že správny je Boženin prístup.
V úlohe 5 by si teda mali rozdeliť odmenu narovnako. Takže každý dostane 50 €.
V úlohe 6 by ten robotník, ktorý pracoval 16 hodín, mal dostať 96 € a druhý robotník 54 €.
Na druhej strane, ak obaja robotníci pracovali rovnako dlho a v rovnako náročnej pôde, tak by mali byť ohodnotení podľa toho, koľko kto nakopal. V tom prípade totiž nepracovali rovnako intenzívne.

8 Suseda pani Heleny, pani Jana, potrebovala vykopať až 30 m dlhý kanál k prípojke na vodu. Dohodla sa s dvoma robotníkmi, že za vykopanie kanála dostanú spolu 150 €. Ako si majú tieto peniaze robotníci rozdeliť, keď prvý robotník pracoval 16 hodín a druhý 9 hodín a každý z nich vykopal za tento čas polovicu kanála? Obaja mali rovnako náročnú pôdu.

9 Pani Helena potrebovala vykopať kanál k prípojke na vodu. Dohodla sa s dvoma robotníkmi, že za vykopanie kanála, ktorý je 20 m dlhý, dostanú spolu 100 €. Ako si majú tieto peniaze spravodlivo rozdeliť, keď prvý robotník pracoval 6 hodín a vykopal 12 metrov a druhý robotník pracoval 16 hodín a vykopal 8 metrov? Obaja mali rovnako náročnú pôdu.

Rozdeľujeme v danom pomere

V skutočnosti to, ako si majú robotníci rozdeliť medzi sebou celú odmenu, je najlepšie riešiť dohodou už na začiatku spolupráce. Výška odmeny by mala závisieť aj od šikovnosti robotníka, aj od toho, ako dlho pracuje. To, kto je šikovnejší, treba, samozrejme, zisťovať za rovnakých podmienok. Ak sa napríklad vrátime k zadaniu úlohy 1 a predpokladáme, že obaja robotníci pracovali rovnako dlho a v rovnako náročnej pôde, tak mali obaja rovnaké podmienky. Potom je jasné, že výkonnejší je ten, ktorý vykopal 12 metrov.
Vzťah medzi ich výkonnosťami sa potom vyjadruje pomerom vykopaných metrov za rovnaký čas (pri rovnakej kvalite pôdy). V našom prípade to bude v pomere 12 : 8 (čítaj dvanásť ku ôsmim).
V takomto pomere sa potom rozdeľuje tak, ako rozdeľoval v úlohe 1 Dominik.
Treba si dať pozor aj na poradie. Pomery 12 : 8 a 8 : 12 nie sú rovnaké. Pri pomere 12 : 8 pripadne na prvú časť 12 dielov a na druhú 8 dielov. Pri pomere 8 : 12 pripadne na prvú časť 8 dielov a na druhú časť 12 dielov.
Zápis pomeru, napr. 12 : 8, nie je zápisom delenia, hoci je tam použitá rovnaká značka. To, či ide o delenie, alebo o pomer, spoznáte podľa textu, v ktorom sa zápis nachádza. Hovoríme, že to závisí od konkrétnej situácie (kontextu úlohy).

! Rozdeliť celok na dve časti v pomere **12** : **8** znamená, že celok rozdelíme na **12** + **8** = 20 rovnakých dielov. Prvá časť sa bude skladať z **12** dielov a druhá z **8** dielov.

V našom prípade o rozdeľovaní odmeny robotníkom bude jeden diel 100 € : 20 = 5 €. Jeden robotník dostane 12 · 5 € = 60 €, druhý 8 · 5 € = 40 €.

1 Rozdeľte 1 kg cukru na dva diely v pomere 3 : 5.

Pozrite, ako si s úlohou 1 poradila Daniela a ako Peter.

Daniela:

Keď mám rozdeľovať 1 kg cukru v pomere 3 : 5, rozdelím cukor najskôr na 3 + 5 = 8 rovnakých dielov.
Rozdeliť 1 kilogram je to isté, ako rozdeliť 1 000 gramov.
1 000 g : 8 = 125 g
Jedna časť sa má skladať z 3 dielov, preto bude mať hmotnosť
3 · 125 g = 375 g.
Druhá časť sa má skladať z 5 dielov, preto bude mať hmotnosť
5 · 125 g = 625 g.

Peter:

Ja som si to nakreslil:

1 kg cukru = 1 000 g cukru

Mám rozdeliť na dve časti: jedna sa bude skladať z 3 rovnakých dielov a druhá z 5 rovnakých dielov. To je spolu 8 rovnakých dielov:

Jeden diel bude mať hmotnosť 1 000 g : 8 = 125 g:

125 g	125 g	125 g	125 g	125 g	125 g	125 g	125 g

Preto jedna časť bude mať hmotnosť $3 \cdot 125$ g = 375 g a druhá $5 \cdot 125$ g = 625 g.

2 Rozdeľte: a) 129 litrov v pomere 1 : 2, b) 450 m^2 v pomere 8 : 1.

3 Rozdeľte v pomere 12 : 8 tieto celky: a) 65 €, b) 121 €, c) 1 kg múky, d) 510 známok.

4 Doplňte správne nasledujúce vety.
a) Rozdeliť celok na dve časti v pomere 7 : 5 znamená, že celok rozdelíme na ..... + ... = ... rovnakých dielov. Prvá časť sa bude skladať z ..... dielov a druhá z ..... dielov.
b) Rozdeliť celok na dve časti v pomere ..... : ..... znamená, že celok rozdelíme na 15 rovnakých dielov. Prvá časť sa bude skladať zo 4 dielov a druhá z ..... dielov.

5 V akom pomere rozdeľovala Božena odmenu pri riešení úlohy 2 v na strane 93?

6 Rozdeľte 1 200 v pomere: a) 7 : 5, b) 1 : 3, c) 5 : 7, d) 13 : 19, e) 21 : 15, f) 28 : 20.

7 Majetok v akej hodnote mal pripadnúť Českej republike a v akej hodnote Slovenskej republike, keď sa delila Československá armáda?

Armáda najviac cítila československy

Zložito, ale zato veľmi rýchlo sa pred 15 rokmi delila Československá armáda. Tvorilo ju takmer 55 300 vojakov z povolania a majetok za približne 420 miliárd korún. Počnúc raketami a lietadlami, končiac muníciou a vojenskými archívmi. To všetko bolo treba rozdeliť v pomere 2 : 1 a v rekordne krátkom čase. Armáda sa musela rozdeliť ako prvá. Civilné orgány o tom rozhodli začiatkom októbra 1992.

(Z tlače 18. 12. 2007)

8 Viera a Peter si rozdelili peniaze v pomere 12 : 8. Petrovi sa ušlo 114 €. Koľko eur dostala Viera?

Pozrite, ako si s poslednou úlohou poradili Edita a Rudo.

Edita:

Z pomeru 12 : 8 vidím, že Petrovi patrí 8 dielov, čo je 114 €.
Potom 1 diel je 114 € : 8 = 14,25 €.
Viere patrí 12 dielov, teda 12 · 14,25 € = 171 €.
Viera dostala 171 €.

Rudo:

Ja som si to opäť znázornil:

Toto je suma, ktorú si Peter a Viera rozdelili.

Rozdelím to na 12 a 8 dielov.

Viera 12 dielov	Peter 8 dielov

Petrových 8 dielov je 114 €.

Viera 12 dielov	Peter 8 dielov = 114 €

1 diel je 114 € : 8 = 14,25 €
Viera má 12 dielov, to je 12 · 14,25 € = 171 €.

9 Pri rozdeľovaní peňazí medzi Karola a Jozefa v pomere: a) 5 : 3, b) 15 : 9, c) 6 : 10, d) 35 : 21, e) 6 : 3,6 sa jednému z nich ušlo 72 €. Koľko eur sa ušlo druhému z nich?

S pomermi sa často stretnete aj v návodoch na používanie rôznych výrobkov.

Koncentrácia šampónu

Väčšina šampónov pre psy je dodávaná koncentrovaná a ďalej ich možno riediť – robiť z nich menej intenzívne roztoky. Nie vždy je srsť znečistená natoľko, aby bolo psíka treba kúpať koncentrovaným šampónom. Napr. šampón Doggy možno riediť v pomere 1 : 2 až 1 : 4 – z 200 ml šampónu tak viete nariediť až 800 ml roztoku.

(Z internetu)

10 V texte sa spomína riedenie v pomere 1 : 2. Koľko dielov vody a koľko dielov šampónu je pri tomto pomere?

11 Patrí pomer 3 : 10 medzi odporúčané pomery z predchádzajúceho textu?

12 Z 200 ml šampónu som si urobil 500 ml roztoku. V akom pomere som ho riedil?

13 Ukážte, že riedením v niektorom z odporúčaných pomerov sa dá z 200 ml šampónu vyrobiť viac ako v článku spomínaných 800 ml roztoku. Koľko ho môže byť najviac?

14 Tu je jeden návod z internetu na riedenie tohto šampónu:
Päť kávových lyžíc vody zmiešam v prázdnej fľaške s dvoma kávovými lyžicami šampónu. Zahrkám a kúpem psa takýmto šampónom. Keď nie som spokojný, okúpem ho ešte raz s novým roztokom tak, že dám o 2 lyžice vody viac.
V akom pomere riedi šampón autor návodu pri prvom a pri druhom kúpaní?

15 Patria oba pomery medzi odporúčané pomery riedenia?

16 Vypočítajte, koľko rozriedeného šampónu Dogcat budeme mať k dispozícii, ak jednotlivé balenia rozriedime v pomere:
a) 1 : 2, b) 1 : 4.

Šampón Dogcat pre psy a mačky obsahuje prírodné výťažky z liečivých rastlín – harmančeka pravého, nechtíka lekárskeho, oleja z levandule a je obohatený o vitamín B5 a o špeciálny kondicionér. Vytvára bohatú penu, ktorá sa ľahko oplachuje. Šampón možno riediť v pomere 1 : 2 alebo 1 : 4 a dodávame ho v balení 220, 310 a 5 000 ml.

(Z internetu)

17 Vek otca a syna je v pomere 10 : 3. Vek otca a dcéry je v pomere 5 : 2. Koľko rokov má syn, ak dcéra má 20 rokov?

18 Adam, Beáta a Daniela zbierajú známky. Počet známok Adama a Beáty je v pomere 3 : 2. Počet známok Adama a Daniely je v pomere 4 : 3. Jeden z nich má 540 známok.
a) Koľko známok majú zvyšní dvaja zberatelia?
b) Koľko má kto známok?

Rozdeľte sa do 3- až 5-členných skupín a riešte úlohy.

Bádanie

19 Milan a Viera si rozdelili peniaze v pomere 5 : 11.
a) O koľko eur viac dostala Viera ako Milan?
b) Koľkokrát viac eur dostala Viera ako Milan?
Úlohu riešte pre sumy 40 €, 60 €, 72 €, 96 €, 108 €, 132 €, 172 € a 264 €. Výsledky píšte v desatinných číslach. Jednotlivé prípady si v rámci skupiny rozdeľte.

Porovnajte svoje riešenie so Rudovým riešením.

Rudo:

Vyriešim túto úlohu pre 172 €.

Celú sumu treba rozdeliť na 11 + 5 = 16 dielov:

172 € : 16 = 10,75 €.

Viere pripadne 11 dielov, teda $11 \cdot 10{,}75 = 118{,}25$.

Milanovi pripadne 5 dielov, teda $5 \cdot 10{,}75 = 53{,}75$.

Teraz už len treba zistiť, o kolko a kolkokrát je číslo 118,25 väčšie ako číslo 53,75.

„O kolko“ sa zisťuje rozdielom $118{,}25 - 53{,}75 = 64{,}5$,

„kolkokrát“ sa zisťuje podielom $\dfrac{118{,}25}{53{,}75} = 2{,}2$.

Viera dostala o 64,50 € viac ako Milan. Viera dostala 2,2-krát viac peňazí ako Milan.

Ak ste správne vyriešili všetkých 8 prípadov, tak vám v časti b) vždy vyšlo 2,2.
Je to náhoda? Alebo to tak bude vždy?
*Správnu odpoveď nájdeme tak, že vyriešime úlohu pre 172 € bez toho, aby sme robili medzivýpočty. To znamená, že s číslom **172** nebudeme „hýbať“.*

Celú sumu treba rozdeliť na 11 + 5 = 16 dielov: $\quad 172 : 16 = \dfrac{172}{16}$.

Viere pripadne 11 dielov, teda $11 \cdot \dfrac{172}{16}$. *Milanovi pripadne 5 dielov, teda* $5 \cdot \dfrac{172}{16}$.

Teraz treba už len zistiť, koľkokrát je číslo $11 \cdot \dfrac{172}{16}$ *väčšie ako číslo* $5 \cdot \dfrac{172}{16}$.

To sa zisťuje podielom $\dfrac{11 \cdot \dfrac{172}{16}}{5 \cdot \dfrac{172}{16}} = \dfrac{11}{5} = 2{,}2$.

Vyšlo nám 2,2. Dôležitejšie však je, že vidíme, že na čísle 172 nezáleží. Keby sme dali namiesto 172 iné číslo, vždy by nám vyšlo 2,2. Vo všetkých ôsmich prípadoch, ale aj pre všetky ďalšie čísla, dostaneme výsledok 2,2.

! Ak niečo rozdeľujeme na dve časti v pomere 11 : 5, tak prvá časť je $\dfrac{11}{5}$-krát väčšia ako druhá časť.

20 Doplňte vety.

a) Ak niečo rozdeľujeme na dve časti v pomere 11 : 5, tak druhá časť je .....-krát menšia ako prvá časť.

b) Ak niečo rozdeľujeme na dve časti v pomere 12 : 7, tak prvá časť je .....-krát väčšia ako druhá časť.

c) Ak niečo rozdeľujeme v pomere ....., tak prvá časť je $\dfrac{9}{4}$-krát väčšia ako druhá časť.

21 Súrodenci Filip a Eliška si rozdelili záhradu v pomere 3 : 5. Aká časť záhrady pripadla Eliške? **Bádanie**

Úlohu riešte pre plochy 400 m², 450 m², 500 m², 600 m², 710 m², 1 050 m², 2 310 m² a 5 070 m². Odporúčame výsledky písať v tvare desatinných čísel.

Pozrite, ako túto úlohu riešil Juraj.

Juraj:

Vyriešim úlohu pre 2 310 m².

Celú plochu treba rozdeliť na 3 + 5 = 8 dielov:

2 310 m² : 8 = 288,75 m².

Eliške pripadne 5 dielov, teda 5 · 288,75 m² = 1 443,75 m².

Teraz už môžem zistiť, aká časť z **2 310 m²** je 1 443,75 m².

To sa zisťuje podielom $\frac{1\,443{,}75}{2\,310} = 0{,}625$.

Ak ste správne vyriešili všetkých 8 prípadov, tak vám vždy vyšlo 0,625. Je to náhoda? Alebo to tak bude vždy?

*Presvedčíme sa o tom podobne ako pri úlohe 19: urobíme pre 2 310 € výpočty ešte raz, ale bez toho, že by sme robili medzivýpočty. To znamená, že s číslom **2 310** nebudeme „hýbať“.*

Celú plochu treba rozdeliť na 3 + 5 = 8 dielov: $\mathbf{2\,310} : 8 = \frac{2\,310}{8}$.

Eliške pripadne 5 dielov, teda $5 \cdot \frac{2\,310}{8}$.

*Teraz treba zistiť, aká časť z **2 310** je* $5 \cdot \frac{2\,310}{8} = \frac{5}{8} \cdot 2\,310$.

To sa zisťuje podielom: $\frac{\frac{5}{8} \cdot 2\,310}{2\,310} = \frac{5}{8}$

Vyšlo nám $\frac{5}{8}$*. Dôležité však je, že na čísle 2 310 nezáleží. Keby sme dali namiesto 2 310 iné číslo, vždy by nám vyšlo* $\frac{5}{8}$*. Vo všetkých ôsmich prípadoch úlohy 2 dostaneme výsledok* $\frac{5}{8} = 0{,}625$.

! Ak niečo rozdeľujeme na dve časti v pomere 3 : 5, tak druhá časť tvorí $\frac{5}{3+5} = \frac{5}{8}$ z toho, čo rozdeľujeme.

6 Narysujte do zošita obrázok hádzanárskeho ihriska podľa opisu, ktorý sme našli na internete. Obrázok narysujte v mierke: a) 1 : 400, b) 1 : 250.

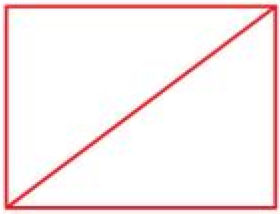
Hádzaná sa hráva na ihrisku 40 metrov dlhom a 20 metrov širokom, ktoré je rozdelené na dve bránkoviská a hracie pole. Dlhšie okraje ihriska sa nazývajú postranné čiary a kratšie sú bránkové čiary. Na oboch kratších koncoch ihriska sa v strede nachádzajú bránky široké 3 metre a vysoké 2 metre. Bránky sú obklopené polkruhovými čiarami vzdialenými 6 metrov od bránky – tzv. bránkové územie. Čiary, ktoré sú od bránok vzdialené 9 metrov, sú čiary, z ktorých sa uskutočňujú tzv. voľné hody. Prostredná čiara rozdeľuje ihrisko na dve rovnaké časti.

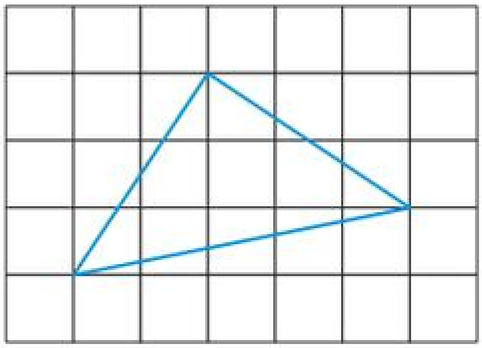
7 Opis hádzanárskeho ihriska v úlohe 6 je zjednodušený. V skutočnosti bránkové územie nemá tvar polkruhu, ale je tvorené dvoma štvrťkruhmi ktoré sú spojené rovnou čiarou s dĺžkou 3 metre. Nájdite na internete presnejší opis hádzanárskeho ihriska a narysujte ho ešte raz v mierke 3 : 1 000.

8 Prerysujte obrázky v mierke 5 : 2.

a) Odmerajte veľkosti všetkých strán v daných útvaroch aj vo vami narysovaných útvaroch. Porovnajte dĺžky sebe zodpovedajúcich strán. Čo pozorujete?

b) Odmerajte veľkosti všetkých uhlov v daných útvaroch aj vo vami narysovaných útvaroch. Porovnajte veľkosti sebe zodpovedajúcich uhlov. Čo pozorujete?





9 Narysujte v mierke 1 : 700 obdĺžnikový pôdorys školy s rozmermi 80 m a 20 m.

Pozrite sa, ako túto úlohu riešila Paula.

Paula:

Rozmery 80 m a 20 m si premením na centimetre. To je 8 000 cm a 2 000 cm. Rozmery na obrázku mi potom vychádzajú takto:

8 000 : 700 = 11,428 571... a 2 000 : 700 = 2,857 142.

Tak presne rysovať sa nedá, preto narysujem len približné riešenie: obdĺžnik s rozmermi 11,4 cm a 2,85 cm.

22 Doplňte vety.

a) Ak niečo rozdeľujeme na dve časti v pomere 3 : 5, tak prvá časť tvorí $\frac{?}{3+5}$ z toho, čo rozdeľujeme.

b) Ak niečo rozdeľujeme na dve časti v pomere 7 : 4, tak prvá časť tvorí $\frac{?}{?}$ z toho, čo rozdeľujeme.

c) Ak niečo rozdeľujeme v pomere ..... : ....., tak prvá časť tvorí $\frac{9}{17}$ z toho, čo rozdeľujeme.

Aj pre nasledujúcu úlohu platí to isté ako pre obe predchádzajúce bádania. Ide totiž opäť o typ úlohy, kde nezáleží na sume, ktorá sa rozdeľuje.

23 Karol, Peter a Tomáš si rozdelili peniaze tak, že Karol a Peter dostali peniaze v pomere 5 : 4 a Peter a Tomáš v pomere 6 : 7. V akom pomere dostali peniaze Karol a Tomáš?

Juraj riešil aj túto úlohu.

Juraj:

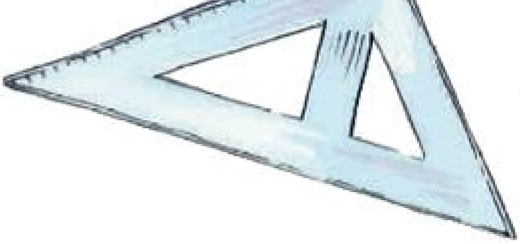
Vyskúšam, aký výsledok dostanem, ak suma,
ktorú dostal Karol, bude napríklad 90 €.
Najprv využijem prvý pomer 5 : 4.
Karolových 90 € je 5 dielov, 1 diel je potom 90 € : 5 = 18 €.
Potom Petrove 4 diely sú 4 · 18 € = 72 €.
Prejdeme na druhý pomer 6 : 7.
Petrových 72 € je 6 dielov. 1 diel je potom 72 € : 6 = 12 €.
Potom Tomášových 7 dielov je 7 · 12 € = 84 €.
To znamená, že Karol a Tomáš dostali peniaze v pomere 90 : 84.

24 Vysokoškoláci Peter a Silvia občas tipujú výsledky futbalových zápasov. Väčšinou ich neuhádnu a všetko prehrajú. Naposledy však mali šťastie. Zložili sa na jeden tiket: Silvia prispela 3 eurami a 60 centami, Peter 5 eurami a 40 centami. Na tento tiket vyhrali 45 eur. V akom pomere si majú rozdeliť výhru?

25 Dĺžky strán obdĺžnika sú v pomere 5 : 7.

a) Jedna strana obdĺžnika meria 14 cm. Vypočítajte obvod tohto obdĺžnika. Pozor, úloha má 2 riešenia!

b) Obvod obdĺžnika je 42 cm. Vypočítajte dĺžky jeho strán.



Rôzne alebo rovnaké pomery? Úmera

Asi sa vám v úlohe 24 predchádzajúcej kapitoly ťažko kontroloval výsledok, keďže ste mali výsledky rôzne. Boli však skutočne rôzne?

Pozrime sa na tieto riešenia.
Aj vy tvrdíte, že si výhru majú rozdeliť v pomere, v akom prispeli na tiket? Aký ste potom dali výsledok? V centoch: ***Silvia : Peter = 360 : 540*** *alebo v eurách:* ***Silvia : Peter = 3,6 : 5,4****? Sú tieto pomery rovnaké?*
Milan tvrdí, že je to jedno a dokonca, že si výhru môžu rozdeliť aj v pomere ***Silvia : Peter = 2 : 3****, aj tak to vyjde rovnako.*

1 Má Milan pravdu? Vyjde pri každom spomenutom pomere rovnaké rozdelenie?

Milan:
Ak rozdelím výhru 45 € v pomere 2 : 3, dostanem:
45 € : 5 = 9 €   2 · 9 € = 18 €   3 · 9 € = 27 €
Pri rozdelení v pomere 360 : 540 mám:
45 € : 900 = 0,05 €   360 · 0,05 € = 18 €   540 · 0,05 € = 27 €
Nakoniec pri pomere 3,6 : 5,4 vyjde:
45 € : 9 = 5 €   3,6 · 5 € = 18 €   5,4 · 5 € = 27 €
Vždy to vyšlo rovnako.

2 Zopakujte si, ako sme zisťovali, či sa dva zlomky rovnajú. Ktoré rovnosti sú pravdivé?

a) $\frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ c) $\frac{7}{3} = \frac{28}{9}$ d) $\frac{6}{12} = \frac{4}{8}$ e) $\frac{20}{24} = \frac{10}{12}$

3 Diskutujte o tom, čo podľa vás znamená, že sú dva pomery rovnaké.

Tu sú názory Milana, Viery a Zuzany.

Milan:
Dva pomery sú rovnaké, ak z toho istého celku vyjdú rovnaké časti.

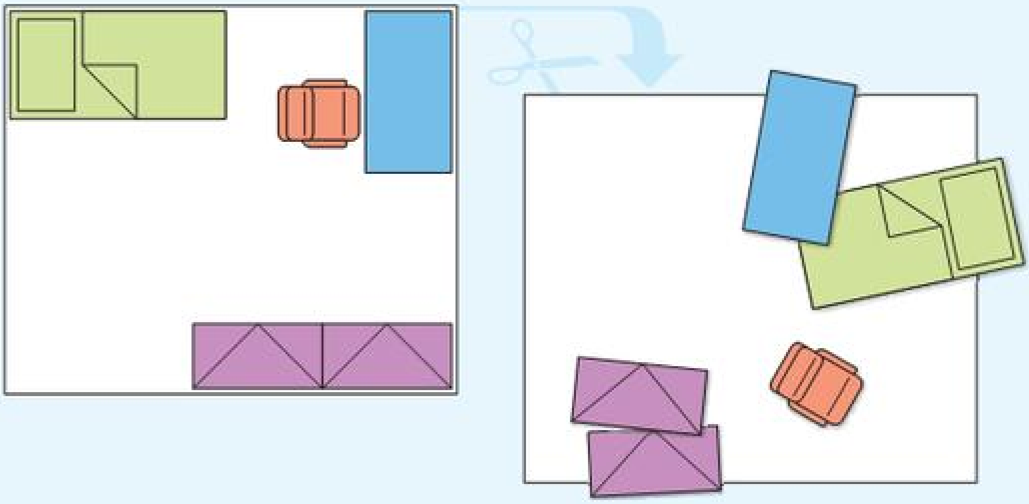
Viera:
Dva pomery sú rovnaké, ak pri porovnaní, kolkokrát je jedna časť väčšia ako druhá, vyjde pri oboch pomeroch to isté číslo.

Čo je mierka?

Pri stavbe domu či pri tvorení záhrady často potrebujeme nakresliť plán pozemku. Pri cestovaní býva dôležité rýchlo sa zorientovať v mape. Mapy aj plány majú niečo spoločné – zachytávajú síce skutočnosť, ale zmenšenú. Poďme sa na to pozrieť podrobnejšie.

1 Načrtnite na štvorčekový papier pôdorys svojej izby. Vyznačte na ňom, kde máte posteľ, stôl, skriňu...

Martina chcela cez jarné prázdniny premiestniť nábytok vo svojej izbe. Mala jasnú predstavu, čo kde chce mať, ale nebola si istá, či sa jej to do izby vojde tak, ako si to premyslela. Preto sa rozhodla, že si izbu nakreslí čo najpresnejšie na papier, jednotlivé kusy nábytku tiež vystrihne z papiera a skúsi „nábytok" poukladať do izby najskôr iba na papieri.



Martine bolo jasné, že ak jej má plánik pomôcť, musí všetky rozmery zmenšiť rovnako. Keď odmerala svoju izbu, zistila, že má rozmery 4,2 m a 3,6 m. Rozhodla sa, že si na papier s rozmermi 17 cm a 17 cm nakreslí niekoľkokrát menší plánik. Aký najväčší plánik sa jej na tento papier zmestí, ak chce, aby plánik bol celočíselnekrát menší?

2 Koľkokrát menší je každý rozmer izby na plániku v porovnaní so skutočnosťou? Aké rozmery bude mať izba na plániku?

Asi ste aj vy prišli na to, že Martina zmenšila každý rozmer izby 25-krát. Stačí na kalkulačke vypočítať 420 cm : 17 cm = 24,705 882... Vidíme, že 24-krát sa zmenšiť nedá, zmenšená strana by bola väčšia ako 17 cm:

420 : 24 = 17,5.

25-násobné zmenšenie sa Martine na jej papier už zmestí, pretože

420 : 25 = 16,8 a 360 : 25 = 14,4.

Zuzana:

Dva pomery sú rovnaké, ak prvá časť tvorí pri oboch pomeroch tú istú časť celku. Samozrejme, to musí platiť aj pre druhú časť.

4 Diskutujte o týchto troch návrhoch. Ku ktorému názoru sa prikloníte? Pomáhajte si porovnávaním pomerov.
1 : 2 a 3 : 6, 4 : 6 a 6 : 9, 8 : 5 a 12 : 7, 21 : 12 a 49 : 28.
Celky si voľte sami.

Viera:

Pri prvej dvojici pomerov platí, že **druhá** časť pri prvom pomere je $\frac{2}{1}$-krát väčšia ako **prvá** časť. **Druhá** časť pri druhom pomere je $\frac{6}{3}$-krát väčšia ako **prvá** časť. Preto mi stačí zistiť, či platí, že $\frac{2}{1}$-krát väčší je to isté ako $\frac{6}{3}$-krát väčší.

Podobne pri ďalších dvojiciach budem zisťovať, či platí, že $\frac{6}{4}$-krát väčší je to isté ako $\frac{9}{6}$-krát väčší (toľkokrát je **druhá** časť väčšia ako **prvá**), či $\frac{8}{5}$-krát väčší je to isté ako $\frac{12}{7}$-krát väčší (toľkokrát je **prvá** časť väčšia ako **druhá**), a či $\frac{21}{12}$-krát väčší je to isté ako $\frac{49}{28}$-krát väčší (toľkokrát je **prvá** časť väčšia ako **druhá**).

To znamená, že zisťujem, či platia rovnosti $\frac{2}{1} \stackrel{?}{=} \frac{6}{3}$, $\frac{6}{4} \stackrel{?}{=} \frac{9}{6}$, $\frac{8}{5} \stackrel{?}{=} \frac{12}{7}$, $\frac{21}{12} \stackrel{?}{=} \frac{49}{28}$.

Zuzana:

Mne tiež stačí zistiť, či sú nejaké zlomky rovnaké. Pri prvej dvojici tvorí prvá časť pomeru 1 : 2 presne $\frac{1}{3}$ celku. Prvá časť pri druhom pomere 3 : 6 tvorí $\frac{3}{9}$ toho istého celku. Preto pri prvej dvojici zisťujem, či $\frac{1}{3}$ celku je to isté ako $\frac{3}{9}$ toho istého celku. Teda či platí rovnosť $\frac{1}{3} \stackrel{?}{=} \frac{3}{9}$.

V ďalších prípadoch pôjde o rovnosti $\frac{4}{10} \stackrel{?}{=} \frac{6}{15}$, $\frac{8}{13} \stackrel{?}{=} \frac{12}{19}$, $\frac{21}{33} \stackrel{?}{=} \frac{49}{77}$.

Vyšlo mi to isté, čo ostatným dvom.

Rovnaké sú pomery 1 : 2 a 3 : 6, 4 : 6 a 6 : 9, 21 : 12 a 49 : 28.

! Dva pomery sú rovnaké, ak sa rovnajú príslušné zlomky.

! Rovnosť pomerov zapisujeme pomocou znaku pre rovnosť, napr. 4 : 6 = 6 : 9.
Takýto zápis voláme **úmera**.

! Úmera je rovnosť dvoch pomerov.

5 Zistite, ktoré z pomerov 8 : 6; 3 : 4; 15 : 20; 28 : 21; 2,7 : 3,6; 18 : 14 sa rovnajú.

Pozrite, ako túto úlohu riešil Jano a posúďte, či je to správne.

Jano:
Všetky pomery budem chápať ako príklady na delenie.
Vypočítam ich ľahko, napr. na kalkulačke.

8 : 6 = 1,3333... 3 : 4 = 0,75 15 : 20 = 0,75
28 : 21 = 1,3333 2,7 : 3,6 = 0,75 18 : 14 = 1,28571...

Hneď vidím, že sa rovnajú dva pomery 8 : 6 a 28 : 21
a tri pomery 3 : 4; 15 : 20 a 2,7 : 3,6.

! Na kalkulačke sa pomery najlepšie porovnávajú tak, že pomery chápem ako delenie.

6 Zistite, ktoré zo zápisov:
a) 12 : 15 = 28 : 35; b) 5 : 7 = 7 : 10; c) 9 : 21 = 39 : 91; d) 17 : 11 = 34 : 23 sú úmery.

Pozrite, ako túto úlohu riešil Juraj a posúďte, či je to správne.

Juraj:
Všetky pomery budem chápať ako zlomky. Tie viem porovnať pomocou krížového pravidla.

$\frac{12}{15} = \frac{28}{35}$ → $12 \cdot 35 = 420,\ 15 \cdot 28 = 420$ → sú rovnaké

$\frac{5}{7} = \frac{7}{10}$ → $5 \cdot 10 = 50,\ 7 \cdot 7 = 49$ → nie sú rovnaké

$9 : 21 = 39 : 91$ → $9 \cdot 91 = 819,\ 39 \cdot 21 = 819$ → sú rovnaké

$17 : 11 = 34 : 23$ → $17 \cdot 23 = 391,\ 11 \cdot 34 = 374$ → nie sú rovnaké

Hneď vidím, že úmery sú dve: 12 : 15 = 28 : 35 a 9 : 21 = 39 : 91.

! Bez kalkulačky sa pomery najlepšie porovnávajú krížovým pravidlom.

10 Zistite mierku mapy, ak vzdialenosť dvoch miest na mape je 4,2 cm a ich skutočná vzdialenosť je 84 km. Mierku zapíšte tak, aby jedno z čísel bolo 1.

11 Aké rozmery bude mať obrázok obdĺžnika, keď jeho skutočné rozmery sú 36 mm a 48 mm a znázorňujeme ho v mierke: a) 2 : 3, b) 3 : 2?

S mierkami sa veľmi často stretnete pri mapách. Keďže mapy znázorňujú na malom obrázku veľké územie, často používané mierky sú napr. 1 : 1 000, 1 : 10 000, 1 : 20 000, 1 : 50 000, 1 : 100 000 alebo 1 : 1 000 000.

Na obrázku vidíte mapu Trenčianskeho samosprávneho kraja v mierke 1 : 1 000 000. Vyriešte úlohy.

12 Vzdialenosť Bánoviec nad Bebravou a Považskej Bystrice vzdušnou čiarou je 4,6 cm. Aká je táto vzdialenosť v skutočnosti?

Boris povedal, že túto úlohu vie vyriešiť aj z hlavy.

Boris:
Mierka 1 : 1 000 000 znamená, že 1 cm na mape zodpovedá 1 000 000 cm v skutočnosti. Takže 4,6 cm zodpovedá 4 600 000 cm v skutočnosti. To je 46 000 metrov, čiže 46 km.

13 Určte skutočnú vzdušnú vzdialenosť Myjavy a Partizánskeho. Na základe toho odhadnite skutočnú cestnú vzdialenosť.

14 Porovnajte výsledok úlohy 13 s údajmi na internete.

7 Zapíšte pomery inak pomocou menších čísel a zapíšte príslušné úmery.
20 : 14, 30 : 40, 17 : 34, 28 : 30, 10 : 5.

8 Ktoré číslo patrí na prázdne miesto? Zapíšte do zošita príslušné úmery aj s doplnenými číslami.
a) 20 : 14 = 10 : ..... b) 36 : ..... = 8 : 10 c) ..... : 18 = 14 : 12 d) 84 : 30 = ... : 75

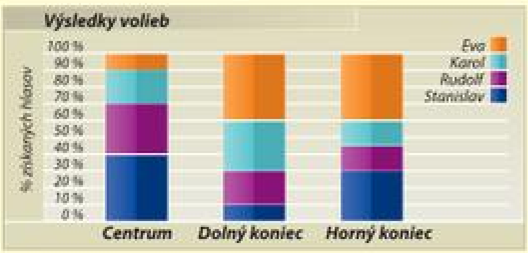
Eva:
Pomery a zlomky sú veľmi podobné. Pomer ani zlomok sa nezmení, ak obe čísla, ktoré v ňom vystupujú, vynásobíme tým istým nenulovým číslom.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{14}{21} \qquad 2:3=(2\cdot 7):(3\cdot 7)=14:21$$

9 Ktoré pomery sú rovnaké?
3 : 6 6 : 9 4 : 6 6 : 10 4 : 9 6 : 12 2 : 3

Voľby starostu 1

O štyri mesiace budú v Novučkej Vsi voľby starostu. O túto funkciu sa uchádzajú štyria kandidáti. Dva diagramy na obrázku znázorňujú výsledky verejného prieskumu pred voľbami. V prvom diagrame je znázornený predpokladaný počet hlasov odovzdaných v jednotlivých volebných okrskoch. Druhý diagram znázorňuje predpokladané výsledky volieb podľa okrskov, teda koľko percent z celkového počtu platných hlasov získajú kandidáti v jednotlivých volebných okrskoch.



Úloha 1: V ktorom okrsku by podľa tohto prieskumu bolo najviac odovzdaných hlasov?

Úloha 2: Koľko percent hlasov by získal Rudolf v okrsku Centrum?

Úloha 3: Koľko hlasov (nie percent hlasov) by získala Eva v okrsku Horný koniec?

Úloha 4: O koľko hlasov menej ako Eva by získal Stanislav v okrsku Horný koniec?

Úloha 5: Kto by podľa tohto prieskumu vyhral voľby?

Postupný pomer

Určite si s rozdeľovaním poradíte aj vtedy, keď v pomere nerozdeľujeme na dve časti (napr. 3 : 5 alebo 1 : 8), ale na tri časti (napr. 2 : 3 : 4 alebo 1 : 1 : 2). Zápis 2 : 3 : 4 čítame dva ku trom ku štyrom.

1 Rozdeľte čísla 36 a 1 440 v pomere: a) 2 : 3 : 4, b) 1 : 1 : 2.

S rozdeľovaním v danom pomere ste sa stretli už skôr. Pripomeňme si rozprávanie o pirátoch z 1. časti učebnice:

Piráti boli v očiach väčšiny svojich súčasníkov bandou lúpežníkov bez cti. Medzi sebou však dodržiavali prísne pravidlá, ktoré každý odprisahal nad bibliou alebo sekerou. Týkali sa aj delenia koristi. Dohoda, ktorú v roku 1721 uzavrel pirátsky kapitán Bartholomew Roberts (na obrázku) so svojou posádkou, obsahovala aj tento článok:

Článok 10.
Kapitán a prvý dôstojník dostanú každý 2 podiely na koristi, hlavný delostrelec a bocman (loďmajster) jeden a pol podielu, ostatní dôstojníci jeden a štvrť, jednoduchí vojaci (džentlmeni šťasteny) každý jeden podiel.

2 Po jednej pirátskej výprave, na ktorej padol prvý dôstojník, bocman aj hlavný delostrelec, ostalo okrem kapitána nažive 8 dôstojníkov a 18 jednoduchých vojakov. Zistite pomer **kapitán : dôstojníci : vojaci** rozdelenia celej koristi. Pomer udajte v prirodzených číslach.

3 Aký by bol pomer **kapitán : dôstojníci : vojaci**, keby ostal nažive aj: a) prvý dôstojník, b) bocman (patrí medzi dôstojníkov), c) prvý dôstojník aj bocman.

4 Prečítajte si článok a odpovedzte na otázky.

Česká koalícia delí rezorty

Podľa neoficiálnych informácií zo zákulisia by ODS mohla získať – vrátane postu premiéra – šesť kresiel, TOP09 päť a Veci verejné štyri ministerské posty. Ak by sa pomer rozdelenia vládnych kresiel 6 : 5 : 4, ako o ňom informoval aj server idnes.cz, potvrdil, znamenalo by to, že pravo-stredová vláda bude mať až 15 členov. Na začiatku rokovaní pred troma týždňami pritom lídri strán tvrdili, že vláda bude mať iba 14 členov.

(Z tlače, 22. 6. 2010)

13 PRIAMA A NEPRIAMA ÚMERNOSŤ

Závislosti

V tejto kapitole sa pozrieme na vzťahy dvoch veličín. S väčšinou úloh, ktoré budeme riešiť, ste sa už stretli, preto pre vás budú určite ľahké.

V obchode

Určite ste už videli vrecia zemiakov, ktoré predávajú v obchode.

1 V obchode balia zemiaky v balíkoch po 9 kilogramov. Koľko kilogramov je zabalených v 32 balíkoch? Napíšte príslušný výpočet.

Tiež ste to počítali pomocou násobenia $32 \cdot 9 = 288$?

2 Ako určíme celkovú hmotnosť v závislosti od počtu balíkov? Opíšte slovne tento výpočet.

Pozrite, ako úlohu riešili Anna a Soňa.

Anna:
Počet balíkov · 9 = Celková hmotnosť.

Soňa:
Ja si to zapisujem podobne, ale len pomocou prvých písmen: $P \cdot 9 = C$.

Anna:
Soňa to nemá dobre, lebo neopísala výpočty slovne, ale len pomocou písmen.

Soňa:
Máš pravdu, takto to je však úspornejšie a aj tak sa tomu dá rozumieť. Navyše som to takto videla písať u môjho brata deviataka.

> **!** Zápis $\boldsymbol{P \cdot 9 = C}$ vyjadruje, ako od seba závisia počet balíkov $\boldsymbol{P}$ a celková hmotnosť $\boldsymbol{C}$.

3 Ako sa zmenia zápisy Anny a Sone v prípade, že v balíkoch bude:
a) 12 kg, b) 10,5 kg zemiakov?

a) Aký pomer sa vyskytuje v článku?
b) Ktorá strana by podľa článku mala najmenej ministerských postov?
c) Koľko ministrov by mali jednotlivé strany, keby česká vláda mala 15 členov?
d) Koľko ministrov by mali jednotlivé strany, keby česká vláda mala 45 členov?

5 Koľko ministrov môže mať vláda v krajine X, ak vieme, že si ministerské kreslá budú rozdeľovať tri strany v pomere 3 : 7 : 2? Vieme len, že ministrov bude menej ako 50.

Informáciu z predchádzajúceho článku o rozdelení v pomere 6 : 5 : 4 by sme mohli nahradiť dvoma informáciami: Pomer ministrov ODS a TOP 09 je 6 : 5 a pomer ministrov TOP 09 a Vecí verejných je 5 : 4.
*Takže v zápise 6 : 5 : 4 sa vlastne skrýva viac informácií. Takýto pomer voláme **postupný pomer**.*

6 Pri riešení úlohy 4 ste asi prišli na to, že vyjadrenie pomocou pomeru nie je najvhodnejšie, pretože z neho nijako nevyplýva, že ministrov bude 15. V takom pomere možno rozdeliť napr. aj 300 ministerských kresiel, lenže 300 ministrov vo vláde by bol veľmi nezvyčajný počet. Preformulujte časť článku tak, aby bolo jasné, že počet ministrov je presne 15.

7 Strany trojuholníka sú v pomere 3 : 4 : 5. Obvod trojuholníka je 156 cm. Vypočítajte veľkosti strán trojuholníka.

8 Strany trojuholníka sú v pomere 3 : 4 : 6. Jedna jeho strana meria 21 cm. Vypočítajte jeho obvod. Pozor, úloha má viac riešení.

9 Dajte do postupného pomeru vek Adama, Barbary a Dušana (Adam : Barbara : : Dušan), ak viete, že vek Adama : veku Barbary = 3 : 4 a vek Barbary : veku Dušana = 3 : 5.

Pozrite, ako úlohu riešila Gabriela.

Gabriela:
Vek Barbary je v oboch pomeroch, zvolím si teda, že Barbara bude mať napr. 30 rokov.
Potom v prípade pomeru Adam : Barbara bude jeden diel 30 : 4 = 7,5 a Adam bude mať 3 · 7,5 = 22,5 rokov.
V prípade pomeru Barbara : Dušan bude jeden diel 30 : 3 = 10 a Dušan bude mať 5 · 10 = 50 rokov.
Hľadaný pomer je napr. 22,5 : 30 : 50.

10 Ako by to vyšlo, keby ste začali s tým, že Barbara má 60 rokov? Vyšiel rovnaký pomer, ako keď mala Barbara 30 rokov?

Emil si s úlohou 9 poradil inak.

Emil:
V oboch pomeroch je vek Barbary, raz s číslom **4** a raz s číslom **3**. Upravíme oba pomery tak, aby tam bolo rovnaké číslo. Napríklad

$$3 : 4 = (3 \cdot 3) : (4 \cdot 3) = 9 : 12,$$
$$3 : 5 = (3 \cdot 4) : (5 \cdot 4) = 12 : 20.$$

Hľadaný pomer je napr. $9 : 12 : 20$.

11 Úspory Fera a Dorky sú v pomere 2 : 5. Úspory Fera a Kvetky sú v pomere 9 : 4. V akom pomere sú úspory Fera, Dorky a Kvetky? Koľkokrát viac eur má našetrených Dorka ako Kvetka?

Voľby starostu 2

Najskôr si pripomeňte rubriku *Voľby starostu 1* na str. 105. Dva mesiace pred voľbami sa konal nový prieskum. V ňom sa uvažovalo už len o troch kandidátoch, pretože na základe prvého prieskumu sa Rudolf svojej kandidatúry vzdal. Výsledky nového prieskumu zobrazuje tabuľka. Je v nej uvedené očakávané rozdelenie hlasov medzi kandidátov v jednotlivých okrskoch.

	Okrsok		
Kandidát	**Centrum**	**Dolný koniec**	**Horný koniec**
Stanislav	*40 %*	*30 %*	*45 %*
Karol	*20 %*	*35 %*	*45 %*
Eva	*40 %*	*35 %*	*10 %*

Úloha 1: Na základe tabuľky vytvorte stĺpcový diagram podobný diagramu *Výsledky volieb* z úlohy *Voľby starostu 1*.

Predstavte si, že:
- voľby dopadnú presne tak, ako ukazuje nový prieskum;
- voliči odovzdajú spolu 800 platných hlasov;
- počet platných hlasov nebude v žiadnom okrsku menší ako 50.

Úloha 2: Podľa prieskumu sa zdá, že jednoznačným favoritom je Stanislav. Nemusí to však byť pravda: výsledok závisí od počtu hlasov odovzdaných v jednotlivých okrskoch. Ukážte, že 800 hlasov sa dá rozdeliť medzi jednotlivé okrsky tak, aby vyhral Karol.

a) Uveďte výpočet, ktorý ukazuje, že pri vami navrhnutom rozdelení hlasov vyhrá Karol.

b) Pre vami navrhované počty hlasov odovzdaných v jednotlivých volebných okrskoch zostrojte diagram, v ktorom budú počty hlasov, ktoré získali jednotliví kandidáti v jednotlivých okrskoch.

Úloha 3: Rovnako by sa mohlo zdať, že Eva nemá šancu. Zistite, či to je skutočne pravda. Otázka teda znie: Dá sa spomínaných 800 platných hlasov rozdeliť medzi jednotlivé okrsky tak, aby vyhrala Eva? Svoju odpoveď zdôvodnite. Zostrojte aj príslušný diagram.

Výlet

K *am sa chystáte na koncoročný výlet? Pôjdete aj vy autobusom?*

1 Na koncoročný výlet cestovala celá trieda autobusom. Jeden z rodičov vybavil autobus za 126 eur. Koľko eur to vychádza na jedného žiaka, ak do ich triedy chodí 30 žiakov? Napíšte príslušný výpočet.

2 Určite ste to aj vy počítali delením 126 : 30 = 4,2. Opíšte tento výpočet tak, ako by to urobili Anna a Soňa.

Skôr ako budete pokračovať, skontrolujte si navzájom riešenie úlohy 2.

> **!** Zápis **126 :** $\boldsymbol{P}$ **=** $\boldsymbol{C}$ vyjadruje, ako medzi sebou závisia počet žiakov $\boldsymbol{P}$ a cena na jedného žiaka $\boldsymbol{C}$.

3 Ako sa zmení zápis závislosti medzi počtom žiakov P a cenou na jedného žiaka C v prípade, že by autobus stál: a) 144, b) 99, c) 162 €?

Obdĺžnikový záhon

P *ozrime sa na ďalšiu závislosť.*

1 Jedna strana záhona v záhrade meria 3 m. Určte jeho obsah, ak druhá strana meria 5 m. Napíšte príslušný výpočet.

2 Jedna strana záhona meria 3 m. Ako určíme obsah tohto záhona v závislosti od dĺžky jeho druhej strany? Opíšte tento výpočet tak, ako by to urobili Anna a Soňa.

Skôr ako budete pokračovať, skontrolujte si navzájom riešenie úlohy 2.

> **!** Zápis $\boldsymbol{3 \cdot d = S}$ vyjadruje, ako medzi sebou závisia dĺžka druhej strany $\boldsymbol{d}$ a obsah $\boldsymbol{S}$ obdĺžnikového záhona.

3 Po zmene dĺžky prvej strany sa zmenil zápis závislosti medzi dĺžkou druhej strany d a obsahom S obdĺžnika na: a) $4 \cdot d = S$, b) $9{,}8 \cdot d = S$, c) $16{,}87 \cdot d = S$. Ako sa zmenila dĺžka prvej strany obdĺžnikového záhona?

3 Aké rozmery má mať model postele, ak jej skutočné rozmery sú 110 cm a 200 cm?

4 Aké skutočné rozmery má skriňa, ak jej správny model má rozmery 2,2 cm a 4,8 cm?

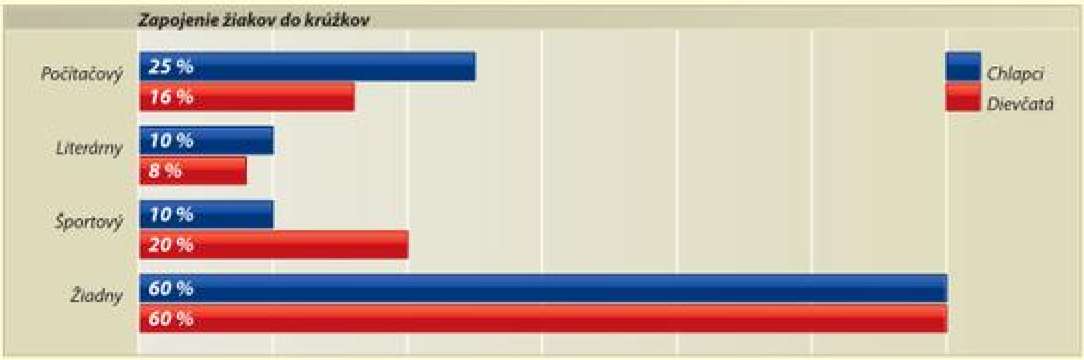
5 Skutočné rozmery stola sú 80 cm a 1,4 m. Aké rozmery má mať jeho model?

To, že Martina zmenšila všetky rozmery 25-krát, znamená, že 1 cm na plániku zodpovedá 25 centimetrom v skutočnosti. Rovnako 1 mm na plániku zodpovedá 25 milimetrom v skutočnosti. Toto zmenšenie vyjadrujeme pomerom 1 : 25, ktorý voláme ***mierka****. Čítame ju rovnako ako pomer: 1 ku 25.*

6 Aké by boli rozmery izby na plániku, keby Martina použila mierku: a) 1 : 30, b) 2 : 45? Vošiel by sa jej plánik na papier s rozmermi 17 cm x 17 cm?

Martina nakoniec použila mierku 1 : 25. Myslela pritom aj na to, že ak sa jej na plániku niečo vojde veľmi tesne, v skutočnosti sa to vojsť nemusí. Izba totiž v skutočnosti nie je presný obdĺžnik, nábytok nemusela mať odmeraný presne a vystrihnuté modely tiež nemusia byť presné.

Záujmové krúžky 1



Na obrázku je znázornené zapojenie chlapcov a dievčat siedmeho ročníka istej školy do krúžkovej činnosti. Počty percent sú presné (teda nevznikli zaokrúhlením na celé čísla).

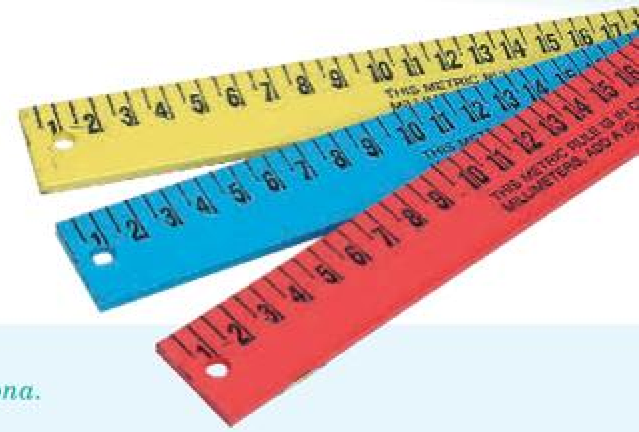
Úloha 1: Koľko percent chlapcov chodí do športového krúžku?

Úloha 2: Ako je možné, že súčet percent znázornených červenými riadkami patriacim dievčatám, je väčší ako 100?

Úloha 3: Kto je podľa uvedeného diagramu v krúžkovej činnosti aktívnejší?
Rozdeľte sa na tri skupiny. Prvá skupina bude hľadať argumenty na odpoveď, že aktívnejší sú chlapci. Druhá skupina bude hľadať argumenty pre to, že aktívnejšie sú dievčatá. Tretia skupina bude hľadať argumenty pre odpoveď: „Ich aktivita je rovnaká."

Mierka

S mierkou ste sa už možno stretli.
V tejto kapitole sa o mierke všeličo dozviete.

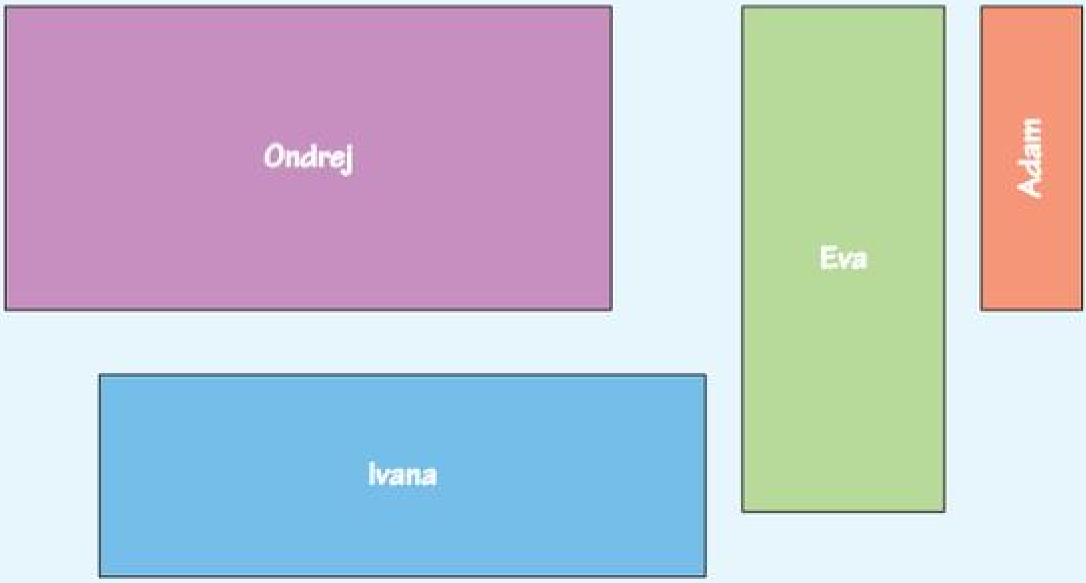


Znázorňujeme obdĺžnikový záhon

Začneme znázorňovaním obdĺžnikového záhona.

1 Znázornite čo najvernejšie záhon obdĺžnikového tvaru s rozmermi 12 m a 4 m.

Predpokladáme, že ani vám sa do zošita nezmestí obdĺžnik s rozmermi 12 m a 4 m. Do zošita musíte znázorniť niečo oveľa menšie. Pochvalu si zaslúžite už vtedy, keď ste do zošita narysovali nejaký obdĺžnik. Presne tak, ako to urobili štyria kamaráti Eva, Ivana, Ondrej a Adam. Tu sú výsledky ich snaženia:



2 Rozhodnite, ktorému z nich sa obdĺžnikový záhon s rozmermi 12 m a 4 m podarilo znázorniť najvernejšie. Pokúste sa aj vysvetliť svoje rozhodnutie.

Podarilo sa vám svoje riešenie vysvetliť? Ak nie, nič to. K vysvetleniu sa vráťte po vyriešení nasledujúcich dvoch úloh.

3 Fialový a modrý obdĺžnik sú rovnako dlhé. Ktorý z nich vernejšie znázorňuje spomínaný záhon? Pokúste sa svoju odpoveď vysvetliť.

4 Zelený a modrý obdĺžnik sú rovnako široké. Ktorý z nich vernejšie znázorňuje spomínaný záhon? Pokúste sa svoju odpoveď vysvetliť.

Pizza

Po výlete sa žiaci rozhodli ísť na pizzu. Objavili blízko seba dve pizzerie s touto ponukou:

Fast pizza

Couvert* **0,50 €** a za každý jednotlivý dielik pizze sa pripláca **0,75 €**

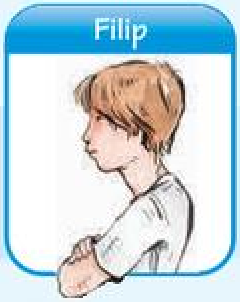
Quick pizza

Couvert* **1,50 €** a za každý jednotlivý dielik pizze sa pripláca **0,50 €**

*Couvert (čítaj *kuvér*) je jednorazový poplatok.

1 Zistite, koľko eur by stálo 32 kúskov pizze vo Fast pizze. Napíšte aj výpočet.

Máte to ako Filip?



Filip:
$32 \cdot 0,75 = 24$
32 kúskov by stálo 24 €.

Ak to máte rovnako, tak ste takisto ako on zabudli na jednorazový poplatok 0,50 €, ktorý ešte treba pripočítať. Správny výpočet je teda 32 . 0,75 € + 0,50 € = 24,50 €.

2 Zistite, koľko eur by stálo 32 kúskov pizze v Quick pizze. Napíšte aj výpočet.

3 Ako určíme cenu v závislosti od počtu kúskov kúpených vo Fast pizze? Opíšte tento výpočet tak, ako by to urobili Anna a Soňa.

Skôr ako budete pokračovať, skontrolujte si navzájom riešenie úlohy 3.

> **!** Zápis $P \cdot 0,75 + 0,5 = C$ vyjadruje, ako medzi sebou závisia počet kúskov P a cena C v pizzerii Fast pizza.

4 Vyjadrite, ako medzi sebou závisia počet kúskov P a cena C v pizzerii Quick pizza.

Aj vy si myslíte, že riešením posledných dvoch úloh je modrý obdĺžnik? Ak áno, máte pravdu. Asi nám dáte za pravdu, že:

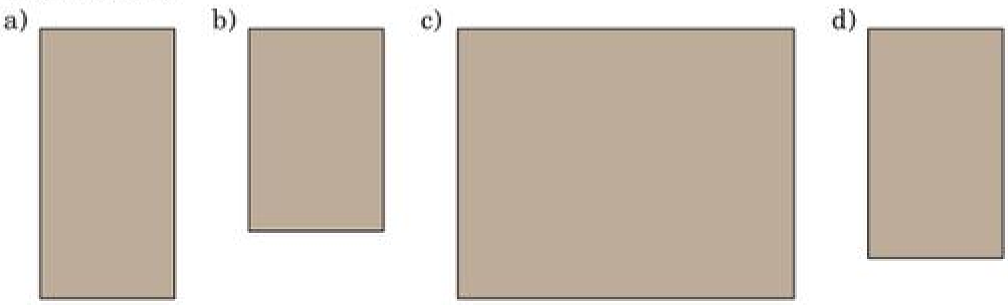
- *pri rovnakej dĺžke bude vernejšie znázorňovať daný záhon ten obdĺžnik, ktorý je primerane široký,*
- *pri rovnakej šírke bude vernejšie znázorňovať daný záhon ten obdĺžnik, ktorý je primerane dlhý.*

Ešte nám zostáva určiť, čo znamená „primerane široký“ a „primerane dlhý“.

Dané pole je 3-krát dlhšie ako široké. Preto aj obdĺžnik, ktorý má jednu stranu 3-krát dlhšiu ako druhú, bude najvernejšie znázorňovať daný obdĺžnikový záhon. Vráťme sa k úlohe 2 a meraním zistime, ktorý z navrhnutých obdĺžnikov má jednu stranu 3-krát dlhšiu ako druhú. Vidíme, že správne sú dve znázornenia záhrady: modrý a oranžový obdĺžnik.

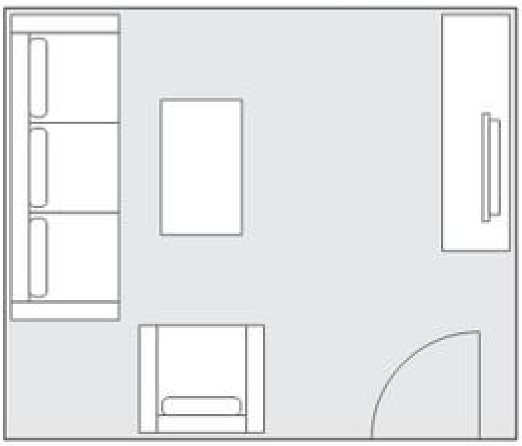
5 Znázornite čo najvernejšie záhon obdĺžnikového tvaru s rozmermi: a) 9 m a 4,5 m, b) 44 m a 110 m, c) 34 m a 20 m. V prípade b) narysujte tri rôzne riešenia.

6 Určte skutočné rozmery štyroch záhonov, ktoré sú znázornené na obrázku. Nájdite viac možností.



7 Na obrázku je znázornené obdĺžnikové pole, ktorého jeden rozmer je 40 m. Určte jeho druhý rozmer. Pomôžte si meraním. Pozor, úloha má dve riešenia.

8 Aké rozmery môže mať izba, ktorá je znázornená na obrázku? Nájdite aspoň dve možnosti.

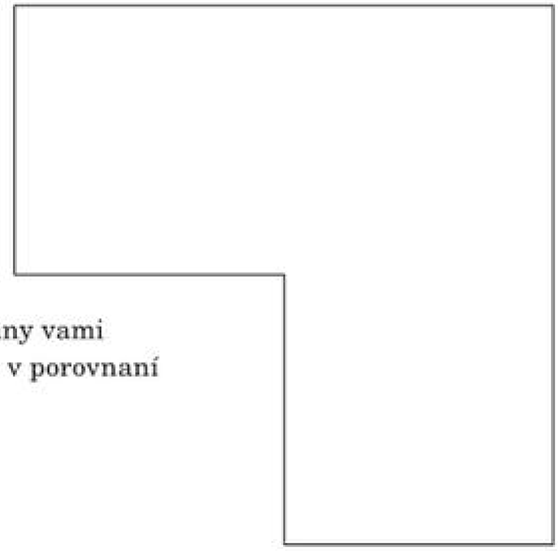


Zmenšenie alebo zväčšenie?

Niekedy nepotrebujeme skutočnosť zmenšiť, ale, naopak, zväčšiť. Napríklad pri veľmi malých súčiastkach budeme obrázok kresliť väčší, ako je skutočnosť. Ak by sme rozmery súčiastky chceli zväčšiť napríklad 5-krát, zapíšeme to pomocou mierky ako 5 : 1. Znamená to, že 5 milimetrov na obrázku zodpovedá 1 milimetru v skutočnosti (a rovnako, že 5 cm na obrázku zodpovedá 1 cm v skutočnosti).

1 Ktoré mierky predstavujú zväčšenie a ktoré zmenšenie oproti skutočnosti?
1 : 40 1 : 3 2 : 1 1 : 50 10 : 1 2 : 3 5 : 4

2 Prerysujte obrázok šesťuholníka na obrázku v mierke:
a) 1 : 4, b) 1,5 : 1, c) 2 : 5.
Potrebné rozmery si odmerajte.



3 Koľkokrát dlhšie, resp. kratšie sú strany vami narysovaných šesťuholníkov z úlohy 2 v porovnaní s daným šesťuholníkom?

4 Vypočítajte presne obsah daného aj všetkých troch vami narysovaných šesťuholníkov z úlohy 2. Koľkokrát väčší, resp. menší obsah majú vami narysované šesťuholníky v porovnaní s daným šesťuholníkom?

5 Na základe predchádzajúcich dvoch úloh doplňte ústne vety:
a) Ak sme strany šesťuholníka zmenšili .....-krát, jeho obsah sa zmenšil .....-krát.
b) Ak sme strany šesťuholníka zväčšili .....-krát, jeho obsah sa zväčšil .....-krát.
c) Ak sme strany šesťuholníka zmenšili .....-krát, jeho obsah sa zmenšil .....-krát.

Silvia si pri riešení predchádzajúcej úlohy všimla zaujímavú vec.

Silvia:
To je zaujímavé: Ak sme strany šesťuholníka zmenšili **štyri**krát, jeho obsah sa zmenšil **šestnásť**krát. Platí:
$4 \cdot 4 = 16$.
Platí to aj pre časti b) a c) predchádzajúcej úlohy:
$1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$ a $2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$.
Je to náhoda?

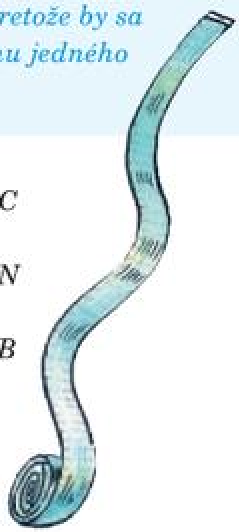
5 Ako sa zmení tento zápis závislosti pre Quick pizzu v prípade, že by couvert v pizzerii bol 2,50 € a jeden kúsok stál 0,60 €?

6 Pizzeria VYBER SI ponúka až 33 druhov pizze s rôznou cenou za jeden kúsok. Jednorazový poplatok je však rovnaký: 0,33 €. Peter chce kúpiť 15 kúskov pizze toho istého druhu. Vyjadrite, ako medzi sebou závisí cena za 1 kúsok a celková cena jeho nákupu.

Peter nazrel do Soninho zošita a všimol si jej riešenie: $\boldsymbol{15 \cdot C + 0{,}33 = C}$.

7 Skúste vysvetliť, prečo to má Soňa zle.

Soňa si neuvedomila, že rôzne veličiny nemôžeme označovať rovnako, pretože by sa plietlo, ktoré písmeno čo znamená. Nemôže preto rovnako označiť aj cenu jedného kúska, aj celkovú cenu. Aspoň jedno z označení musí zmeniť.



8 a) Vyjadrite, ako medzi sebou závisí cena za 1 kúsok K a celková cena C Petrovho nákupu.
b) Vyjadrite, ako medzi sebou závisí cena za 1 kúsok C a celková cena N Petrovho nákupu.
c) Vyjadrite, ako medzi sebou závisí cena za 1 kúsok A a celková cena B Petrovho nákupu.

Obdĺžnikový záhon ešte raz

P*ozrite sa na inú závislosť, ktorá platí pre obdĺžnikový záhon.*

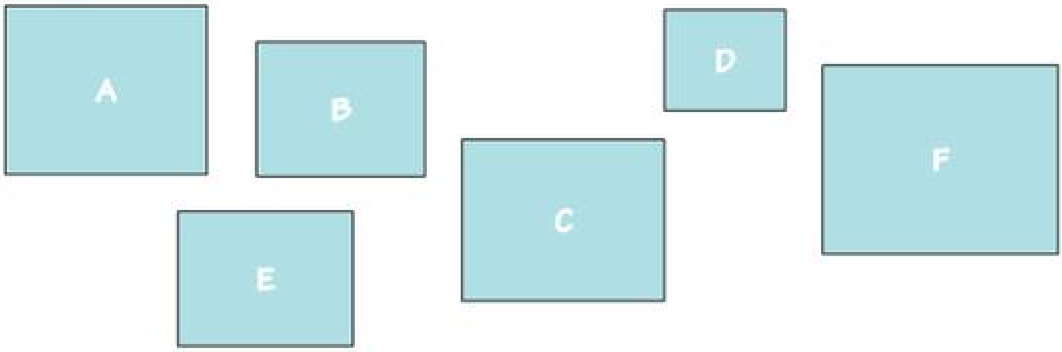
1 Obsah záhona je 30 m². Jedna jeho strana meria 4 m. Určte dĺžku jeho druhej strany. Napíšte príslušný výpočet.

2 Nájdite zápis, ktorý vyjadruje závislosť medzi dĺžkami strán spomínaného obdĺžnikového záhona.

Skôr ako budete pokračovať, skontrolujte si navzájom riešenie úlohy 2.

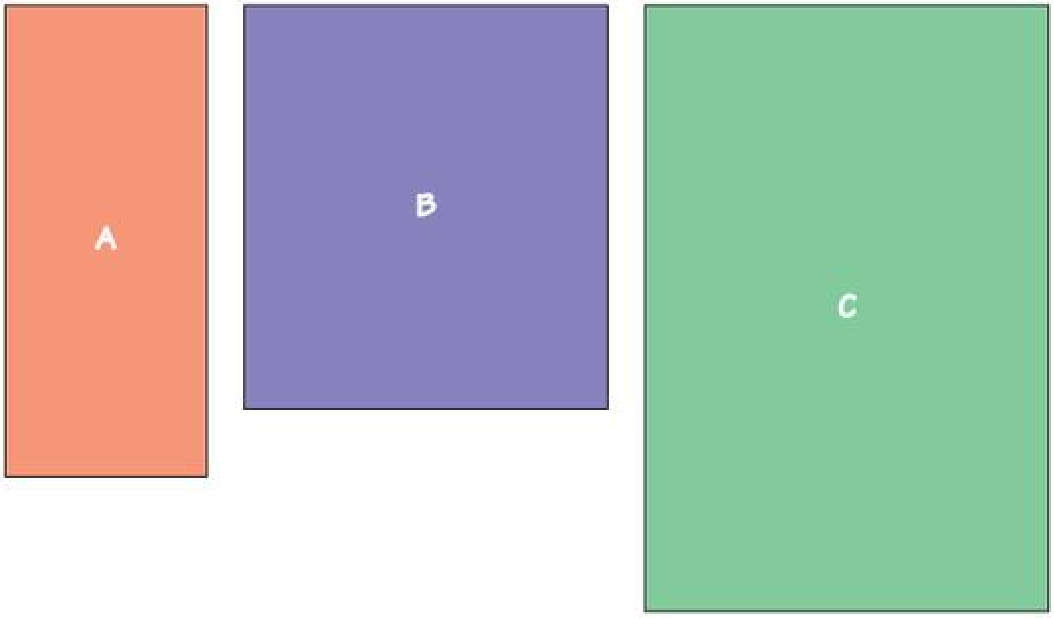
3 Označme si písmenom J dĺžku jednej strany a písmenom D dĺžku druhej strany. Ktorý zo zápisov troch kamarátov je správny?

9 Zistite odhadom, ktoré dvojice obdĺžnikov môžu znázorňovať to isté obdĺžnikové pole.

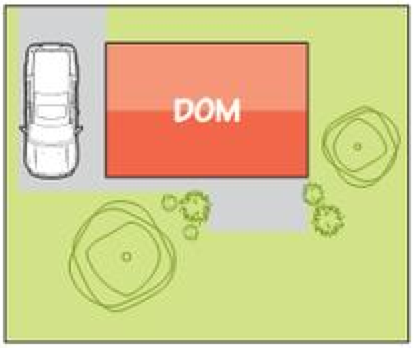


10 Riešte úlohu 9 presne meraním a počítaním.

11 Romanovci majú dom s rozmermi 9 m a 10 m, Kopáčovci majú dom s rozmermi 8 m a 12 m a Markovci s rozmermi 6 m a 14 m. Ktorý obrázok zodpovedá pôdorysu domu Romanovcov a ktorý pôdorysu domu Markovcov?



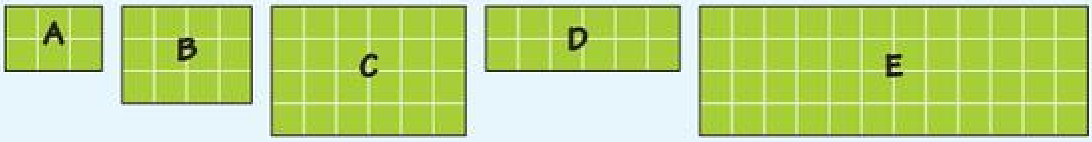
12 Narysujte do zošita obdĺžnik s rozmermi 6 cm a 9 cm. Tento obdĺžnik zodpovedá pôdorysu záhradného domčeka s rozmermi 4 m a 6 m. Dorysujte k pôdorysu domčeka v zošite pozemok, na ktorom tento dom stojí, ak rozmery pozemku sú 10 m a 12 m. Aké budú rozmery pozemku na tomto obrázku?



Dvakrát väčší záhon

S porovnávaním ste sa už stretli. Pozrime sa spoločne, ako to bude s porovnávaním záhrad.

1 Na obrázku je znázornených 5 obdĺžnikových záhrad. Vyberte z nich dvojice, v ktorých jedna záhrada je 2-krát väčšia ako druhá. Svoju odpoveď skúste vysvetliť.



Pravdepodobne sa rozdelíte aspoň na dve skupiny tak, ako sa rozdelili Juraj a Lívia.

Juraj:
Riešením sú napríklad hneď prvé dve záhrady A a B. Veď záhrada B má 2-krát väčší obsah. Záhrada A sa skladá zo 6 štvorčekov a záhrada B z 12 štvorčekov.

Lívia:
Podľa mňa sú riešením napríklad posledné dve záhrady D a E. Záhrada E má 2-krát väčšie rozmery. Záhrada D má rozmery 2 a 6, záhrada E má rozmery 4 a 12.

2 a) Ktoré riešenie sa viac podobá na vaše?
b) Skúste ukázať, že iný názor, ako máte vy, by mohol byť zlý. Vysvetlite v čom.
c) Skúste sa vžiť do pozície obhajovateľov druhého názoru a usilujte sa ukázať, prečo by tento názor mohol byť dobrý. Vysvetlite v čom.

Asi vás neprekvapí, že správnosť riešenia závisí od situácie (teda od toho, ako chápeme význam označenia 2-krát väčší). Pri záhradách máme zvyčajne na mysli ich plochu, preto by sme asi použili Jurajovo riešenie. Keď sa rozprávame o obdĺžnikoch ako o geometrických útvaroch a nepovieme, že nás zaujíma obsah, asi by sme použili Líviino zdôvodnenie.
Aby sa to neplietlo, dohodneme sa, že odteraz budeme pod dvakrát väčším obdĺžnikom rozumieť obdĺžnik, ktorý má dvakrát väčší každý rozmer.
Ak budeme chcieť obdĺžnik, ktorý má dvakrát väčší obsah, musíme to povedať.

3 Doplňte:
- Pod štyrikrát väčším obdĺžnikom rozumieme obdĺžnik, ktorý má .....-krát väčší každý rozmer.
- Pod .....-krát menším obdĺžnikom rozumieme obdĺžnik, ktorý má 1,7-krát menší každý rozmer.

4 Ako sa zmenia tieto tri správne zápisy v prípade, že by obsah obdĺžnika nebol 30 m^2, ale: a) 40; b) 12,6; c) 47,25 m^2?

Po návšteve hradu sa Peťova trieda zastavila na zmrzlinu. Peťo zisťoval, kto si dal koľko kopčekov. Väčšina spolužiakov si dala 2 kopčeky, niektorí si dali len 1 kopček, ale našli sa aj takí, ktorí mali 3 či dokonca 4 kopčeky zmrzliny. Peťa zaujímalo, koľko asi zaplatila za zmrzlinu celá trieda, keď jeden kopček stál 0,35 €.

5 a) Koľko by za zmrzlinu platila celá trieda spolu, ak by všetci spolu mali 27 kopčekov? Napíšte príslušný výpočet.
b) Ako určíme celkovú cenu v závislosti od počtu kopčekov?

6 Peter to má k babičke 3-krát bližšie ako Viera.
a) Ako ďaleko to má k babičke Peter, ak Viera býva 1 200 metrov od babičky?
b) Ako určíme, ako ďaleko to má Peter k babičke, ak Viera býva od babičky x metrov?

7 a) Strana štvorca meria 4,2 cm. Určte jeho obvod.
b) Ako určíme obvod štvorca, ak jeho strana meria a cm?
c) Ako určíme dĺžku jednej strany štvorca, ak jeho obvod je O cm?

8 a) Tromi rovnakými prítokmi sa bazén napustí za 12 hodín. Za ako dlho sa naplní jedným takýmto prítokom?
b) Tromi rovnakými prítokmi sa bazén napustí za H hodín. Za ako dlho sa naplní jedným takýmto prítokom?

9 Dlaždice na palete majú hmotnosť 600 kg. Koľko ich tam je, ak jedna má hmotnosť: a) 2; b) 2,5; c) 0,8 kg. d) Koľko ich tam je, ak jedna má hmotnosť H?

10 Dňa 19. 1. 2010 sa dalo 1 € vymeniť za 1,385 9 amerického dolára. Koľko dolárov by ste vtedy dostali za: a) 5, b) 40, c) 523 eur? d) Koľko dolárov by ste vtedy dostali za E eur?

11 Dňa 19. 1. 2010 sa dalo 1 € vymeniť za 24,520 českých korún. Koľko eur ste potrebovali vymeniť, aby ste dostali: a) 245,2; b) 1 226; c) 31 998,6 českých korún? d) Koľko eur ste potrebovali vymeniť, aby ste dostali K českých korún?

Priama úmernosť

V predchádzajúcej kapitole ste si mohli všimnúť, že niektoré veličiny od seba navzájom závisia, t. j. ak zmeníme jednu, zmení sa aj druhá. Niektoré z týchto závislostí majú podobné vlastnosti. Poďme sa na niektoré pozrieť podrobnejšie.

Zemiaky

V rôznych obchodoch môžu baliť zemiaky do vriec s rôznou hmotnosťou.

1 Tabuľku si prekreslite do zošita a vyplňte ju.

Počet vriec	4	7	8	12	14	15	15	24
Celková hmotnosť (kg)		70	32	84	84	120	165	216
Hmotnosť 1 vreca (kg)	6							

2 Páni Matej a Hynek nakupovali zemiaky v tom istom obchode. Všetky vrecia v ňom majú rovnakú hmotnosť. Pán Matej kúpil 7 vriec zemiakov a pán Hynek 9 vriec zemiakov. Akú celkovú hmotnosť mali zemiaky pána Hynka, ak zemiaky pána Mateja mali hmotnosť 42 kg?

Aj vy ste ako Viliam najprv z nákupu pána Mateja zistili hmotnosť jedného vreca?

Viliam:
7 vriec má hmotnosť 42 kg.
1 vrece bude mať hmotnosť 7-krát menšiu: $42 : 7 = 6$
9 vriec bude mať hmotnosť 9-krát väčšiu ako 1 vrece: $9 \cdot 6 = 54$
Zemiaky pána Hynka mali hmotnosť 54 kg.

Viliam pri riešení tejto úlohy využil vlastnosť, že:

! Koľkokrát menej je rovnakých vriec, toľkokrát menšia je hmotnosť alebo koľkokrát viac je rovnakých vriec, toľkokrát väčšia je hmotnosť.

3 Ako by to dopadlo v podobných situáciách? Nájdite chýbajúce čísla v tabuľkách.

5 vriec	20 kg
12 vriec	

5 vriec	30 kg
12 vriec	

5 vriec	
12 vriec	84 kg

8 vriec	48 kg
12 vriec	

	72 kg
10 vriec	90 kg

	72 kg
6 vriec	48 kg

Zmrzlina

S *Milanom sme boli na zmrzline. Všetky kopčeky stáli rovnako.*

1 Milan si kúpil 4 kopčeky, ja až 7, lebo 3 boli pre sestru. Milan platil 1,56 €. Zistite, koľko som platil za zmrzliny ja. (Pomôcka: Najprv zistite, koľko stál jeden kopček.)

Pozrite, ako úlohu riešil Karol.

Karol:
Milan za 4 kopčeky zaplatil 1,56 €.
Za jeden kopček by platil 4-krát menej:
1,56 € : 4 = 0,39 €
Potom za 7 kopčekov by som platil 7-krát viac:
0,39 € · 7 = 2,73 €

Karol pri riešení tejto úlohy využil vlastnosť, že:

> **!** **Koľkokrát menej** kopčekov kúpime, **toľkokrát menej** zaplatíme alebo **koľkokrát menej** zaplatíme, **toľkokrát menej** kopčekov kúpime.

2 Ako to dopadlo v podobných situáciách v iných stánkoch so zmrzlinou? Nájdite chýbajúce čísla v tabuľkách.

4 kopč.	1,48 €
7 kopč.	

4 kopč.	
7 kopč.	2,38 €

3 kopč.	1,23 €
8 kopč.	

10 kopč.	3,2 €
? kopč.	6,4 €

2 kopč.	0,8 €
? kopč.	2,4 €

? kopč.	3,5 €
7 kopč.	2,45 €

> **!** Závislosť dvoch veličín, v ktorých platí, že koľkokrát **zväčšíme** (**zmenšíme**) jednu veličinu, toľkokrát sa **zväčší** (**zmenší**) druhá veličina, sa volá **priama úmernosť**.

3 Určte, ktoré zo závislostí v predchádzajúcej kapitole sú priama úmernosť.

4 Prekreslite si do zošita tabuľku ceny hrozna v závislosti od hmotnosti a vyplňte ju.

Hmotnosť (kg)	1	1,24	2	2,48	3	3,1	4	4,5	5
Cena (€)	1,5								

5 Doplňte k tabuľke z úlohy 4 ešte dva riadky s delením a vyplňte ich.

Hmotnosť (kg)	1	1,24	2	2,48	3	3,1	4	4,5	5
Cena (€)	1,5	1,86	3	3,72	4,5	4,65	6	6,75	7,5
Cena : hmotnosť									
Hmotnosť : cena									

Aj vám vyšli všetky výsledky v treťom riadku aj všetky výsledky vo štvrtom riadku rovnaké? Nie je to náhoda. Výsledok 1,5 v treťom riadku je vždy cena za 1 kg hrozna – tzv. jednotková cena. Výsledok $0,\overline{6}$ vo štvrtom riadku vždy určuje hmotnosť, ktorú môžeme kúpiť za 1 €. Túto skutočnosť môžeme využiť pri riešení podobných úloh: buď si najprv vypočítame, koľko stojí 1 kg, alebo koľko sa dá kúpiť za 1 €. Obidva tieto postupy si ukážeme pri riešení nasledujúcich úloh.

6 Ak 4 metre látky stoja 32 €, koľko eur zaplatíme za jeden meter? Koľko látky si kúpime za 1 €?

7 V obchode s ovocím sme platili 3,1 € za 1,24 kg hrozna. Koľko kg hrozna si môžem kúpiť za 2,85 €?

Pozrite, ako si s úlohou poradili Viliam a Karol.

Viliam:
Ide o priamu úmernosť, pretože platí: koľkokrát viac kúpim, toľkokrát viac zaplatím.

1,24 kg		1kg	
3,1 €	2,85 €		1€

Môžem to počítať „cez **1 kg**" alebo „cez **1 €**". Ja to budem na kalkulačke počítať „cez **1 kg**". To znamená, že najprv zistím, koľko eur stojí 1 kilogram.

1 kg stojí **3,1** : **1,24** = **2,5** €. **2,85** : **2,5** = **1,14**

Za **2,85 €** môžem kúpiť 1,14 kg.

Karol:
Ja to budem poèítať „cez **1 €**". To znamená, že najprv zistím, koľko kilogramov sa dá kúpiť za 1 euro.

Za 1 € si môžem kúpiť **1,24** : **3,1** = ***0,4*** kg

Za 2,85 € si môžem kúpiť 2,85-krát viac.

2,85 · ***0,4*** = **1,14**, teda **1,14 kg**.

Vyšlo mi to isté ako Viliamovi.

Všetky úlohy na priamu úmernosť môžeme riešiť ako Viliam aj ako Karol. Ukážeme si to na nasledujúcich úlohách.

8 Vyskúšajte si to na iných druhoch ovocia.

a)

2,4 kg	4,2 kg	? kg
4,8 €	? €	4,2 €

b)

3,1 kg	2,4 kg	? kg
5,58 €	? €	6,48 €

c)

4,3 kg	5,2 kg	? kg
11,18 €	? €	4,94 €

b)

1,8 kg	2,3 kg	? kg
9,36 €	? €	9,88 €

9 Koľko minút je 1,2 a) hodiny, b) sekundy?

Porovnajte svoje riešenie s Karolovým riešením.

Karol:

a) Viem, že 1 hodina je 60 minút, preto 1,2 hodiny je $1{,}2 \cdot 60 = 72$ minút.

60 minút	? minút
1 hodina	1,2 hodiny

b) Viem, že 1 minúta je 60 sekúnd, preto 1,2 sekundy je $1{,}2 : 60 = 0{,}02$ minúty.

1 minúta	? minút
60 sekúnd	1,2 sekundy

10 Koľko hodín je: a) 192 minút, b) 3 hodiny 12 minút? Výsledok vyjadrite desatinným číslom.

11 Pán Miloš porýľoval za 3 hodiny a 12 minút presne 100 m^2 záhrady. Na zajtra mu zostalo ešte 65 m^2. Koľko mu to bude trvať, ak bude rovnako usilovný? Výsledok uveďte desatinným číslom.

Riešili ste to rovnako ako Karol alebo ako Viliam?

Karol:

Keď je rovnako šikovný, tak koľkokrát je väčší záhon, toľkokrát dlhšie mu bude trvať rýľovanie. Ide teda o priamu úmernosť.

Tri hodiny a 12 minút je 3,2 hodiny. To viem podľa predchádzajúcej úlohy.

Budem na kalkulačke počítať „cez 1 hodinu". To znamená, že najprv zistím, koľko porýľuje za 1 hodinu.

Za jednu hodinu porýľoval $100 : 3{,}2 = 31{,}25\ m^2$

65 m^2 porýľuje za $65 : 31{,}25 = 2{,}08$ hodiny.

Bude mu to trvať 2,08 hodiny.

Viliam:
Ja som to riešil „cez 1 m^2“. To znamená, že najprv zistím, za aký čas porýľuje 1 m^2.

1 m^2 porýľuje za	$3{,}2 : 100 = 0{,}032$ hodiny.
65 m^2 porýľuje za	$65 \,.\, 0{,}032 = 2{,}08$ hodiny

12 Zistite, či táto tabuľka je tabuľkou priamej úmery.

35	22,5
14	9

Opäť sa pozrite na Viliamov postup.

Viliam:
To nie je ťažké. Ak je to tabulka priamej úmery, musí napríklad platiť:
kolkokrát je 35 väčšie ako 14, tolkokrát je 22,5 väčšie ako 9.
Tak si to zistím.
$35 : 14 = 2{,}5$ $\quad$ $22{,}5 : 9 = 2{,}5$
Je to tabulka priamej úmery.

13 Vymyslite dve rôzne slovné úlohy na priamu úmernosť, ktorá je určená tabuľkou.

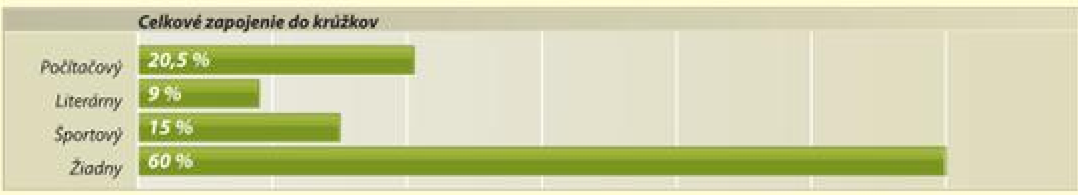
16	
5	8

Vyriešte ich a potom si ich zadajte navzájom.

Záujmové krúžky 2

Najskôr si pripomeňte rubriku *Záujmové krúžky 1* na str. 114. Učiteľka poverila Miriam, aby vytvorila podobný diagram, nie však osobitne pre chlapcov a pre dievčatá, ale spoločný pre všetkých žiakov siedmeho ročníka.

Úloha 1: Miriam úlohu 1 vyriešila veľmi rýchlo. Urobila iba aritmetické priemery. Myslíte si, že Miriam to má správne? Svoju odpoveď zdôvodnite.



Úloha 2: Veronika vie, koľko siedmakov a koľko siedmačiek chodí do tejto školy. Preto jej správne vyšlo, že do počítačového krúžku je prihlásených presne 20 % žiakov. Vytvorte teraz podobný diagram pre všetkých žiakov siedmeho ročníka.

Trojčlenka

Existuje viac spôsobov, ako riešiť úlohy na priamu úmernosť. Niektoré postupy sme si už ukázali. Pozrime sa na ďalší z nich.

1 Zoberte si jednu tabuľku priamej úmery. Presvedčte sa, že platia všetky štyri úmery, ktoré dostaneme porovnaním pomerov v smere šípok.

5	11
7	15,4

5	11
7	15,4

5	11
7	15,4

5	11
7	15,4

$5 : 11 \overset{?}{=} 7 : 15{,}4$

Použili ste kalkulačku ako Libor?

Libor:
Úmera sa mi najlepšie kontroluje tak, že vypočítam na kalkulačke príslušné delenie:

5 : 11 = 0,4545454545454... $= 0{,}\overline{45}$

7 : 15,4 = 0,4545454545454... $= 0{,}\overline{45}$

Táto úmera platí. Podobne to vyjde aj pre ostatné úmery. Asi preto sa táto úmera volá priama, lebo každá dvojica šípok ukazuje rovnakým smerom.

2 Ak 4 metre látky stoja 30 €, koľko korún zaplatíme za 7 metrov látky?

Je to úloha na priamu úmernosť. Na jej riešenie využijeme niektorú z úmer, o ktorých sme sa pred chvíľou rozprávali.

Natália:
Urobím si tabulku a zvolím si jednu dvojicu šípok.

4	30
7	?

Dostanem úmeru 4 : 7 = 30 : ?, v ktorej budem hľadať vynechané číslo. Vynechané číslo môžem nájsť pomocou kalkulačky napríklad krížovým pravidlom. Vyšlo mi 52,5.

Róbert:

Mne sa nechce kresliť tabuľka. Šípky si nakreslím tak, aby smerovali od hľadaného čísla. Napríklad takto:

4 metre ..... 30 €
7 metrov ..... ? €

Dostanem úmeru – delenie 30 : 4 = ? : 7
Ak použijem krížové pravidlo, dostanem $30 \cdot 7 = ? \cdot 4$.
Takže $210 = 4 \cdot ?$. Z toho mi vyjde, že ? = 210 : 4 = 52,5.

> **!** Zápisy a úmery, ktoré Róbert pri riešení použil, sa nazývajú **trojčlenky**, pretože v použitej úmere **tri členy** poznáme a štvrtý – neznámy počítame.

Precvičte si trojčlenku na úlohách:

3 Ak 2,5 kg pomarančov stojí 3,5 €, koľko kg pomarančov si kúpime za 5,04 €?

4 Za 12 lístkov do kina zaplatila skupina 54 €. Koľko korún zaplatí za lístky skupina 20 ľudí? Všetky lístky majú rovnakú cenu.

5 Parník prepláva za 7 hodín 112 km.
a) Koľko by preplával takou istou rýchlosťou za 12 hodín?
b) Za koľko hodín by preplával 56 km?

6 Z diaľnice zatiaľ postavili 35 %, čo je presne 91 km.
Koľko kilometrov majú ešte postaviť?

7 Na internete sme našli uvedenú cenu benzínu 95 natural v tomto tvare:

Benzín 95 natural	1,191	€ / 1 liter
Nafta		€ / 1 liter
LPG		€ / 1 liter

Vysvetlite, čo tento zápis znamená.
Koľko zaplatíme za:
a) 20 litrov, b) 35 litrov tohto benzínu?

Nepriama úmernosť

V kapitole o závislostiach boli okrem priamych úmerností aj iné závislosti. Skôr ako sa na ne pozrieme, vyriešme však najskôr jednu úlohu.

1 Trom koňom vydrží kopa sena 6 dní. Ako dlho by vydržala táto kopa 2 rovnako hladným koňom? (Pomôcka: Najprv zistite, ako dlho by táto kopa sena vydržala jednému koňovi.)

Pozrite, ako túto úlohu riešil Karol.

Karol:
Trom koňom vydrží kopa sena 6 dní. Jednému koňovi preto vydrží trikrát dlhšie.
$6 \cdot 3 = 18$ dní
Dvom koňom vydrží dvakrát kratšie ako jednému koňovi.
$18 : 2 = 9$ dní

2 Dvadsiatim kravám vydrží kopa sena 30 dní. Koľkým rovnako hladným kravám by vydržala táto kopa 12 dní?

Pozrite, ako túto úlohu riešil Tomáš.

Tomáš:
20 kravám vydrží kopa sena 30 dní. Jeden deň by táto kopa stačila pre 30-krát viac kráv.
$20 \cdot 30 = 600$ kráv
12 dní by táto kopa stačila pre 12-krát menej kráv.
$600 : 12 = 50$ kráv

Karol aj Tomáš pri riešení týchto úloh využili vlastnosť, že ***koľkokrát viac*** *koní (kráv) máme,* ***toľkokrát menej*** *dní im kopa sena vydrží. (Samozrejme, neplatí, že napr. 3 000 koňom by táto kopa vydržala iba niekoľko sekúnd, pretože 3 000 koní by nemohlo naraz žrať seno z jednej kopy.)*

! Závislosti dvoch veličín, v ktorých platí, že koľkokrát **zväčšíme** (**zmenšíme**) jednu veličinu, toľkokrát sa **zmenší** (**zväčší**) druhá veličina, sa volajú **nepriame úmernosti**.

3 Nájdite zo závislostí z kapitoly *Závislosti* na stranách 118 – 122 tie, ktoré majú túto vlastnosť.

4 Prekreslite si do zošita tabuľku a vyplňte ju.

Počet koní	1	2	3	4	5	6
Počet dní			6			

5 Na pokosenie veľkého trávnika za 8 hodín treba 20 koscov. Ako dlho by to trvalo jednému koscovi? Ako dlho by to trvalo 10 rovnako výkonným koscom?

6 Na pokosenie veľkého trávnika za 10 hodín treba 15 koscov. Koľko rovnako výkonných koscov potrebujeme, ak chceme, aby to trvalo len 6 hodín?

7 Dvoma prítokmi sa naplní bazén za 6 hodín. Za ako dlho sa naplní jedným prítokom? Ako dlho to bude trvať, keby boli pustené štyri rovnaké prítoky? Všetky prítoky sú rovnako výkonné.

8 Tromi rovnakými prítokmi sa naplní bazén za 12 hodín. Za ako dlho sa naplní jedným prítokom štvrtina bazéna?

Trojčlenka a nepriama úmernosť

A *j úlohy, v ktorých sa vyskytne nepriama úmernosť, môžeme riešiť pomocou trojčlenky.*

1 Zoberte si jednu tabuľku nepriamej úmery. Presvedčte sa, že platia všetky štyri úmery, ktoré dostaneme porovnaním pomerov v smere šípok.

5	15,4
7	11

5	15,4
7	11

5	15,4
7	11

5	15,4
7	11

$5 : 11 \overset{?}{=} 7 : 15{,}4$

Karol opäť použil kalkulačku.

Karol:
Opäť budem kontrolovať úmeru na kalkulačke tak, že vypočítam príslušné delenie:

5 : 11 = 0,4545454545454545... $= 0{,}\overline{45}$

7 : 15,4 = 0,4545454545454545... $= 0{,}\overline{45}$

Táto úmera platí. Šípky v každej dvojici idú opačným smerom, resp. nejdú priamo, asi preto sa táto úmera volá nepriama.

To znamená, že trojčlenku môžeme použiť aj pri riešení úloh s nepriamou úmernosťou, akurát si šípky musíme nakresliť správnym – opačným smerom.

2 Keď sú na pošte otvorené tri okienka, vybavia za 15 minút priemerne 30 ľudí. Za aký čas vybavia ten istý počet ľudí, ak otvoria ďalšie dve okienka? (Predpokladáme, že pri každom okienku vybavujú rovnako rýchlo. V bežnom živote to však často tak nie je.)

Pozrite sa, ako si s riešením úlohy 2 poradila Hedviga.

Hedviga:
Ide o nepriamu úmernosť. Ja by som si to zapísala takto:

↓ 3 okienka ..... 15 minút ↑
5 okienok ..... ? minút

Musí teda platiť: $\frac{5}{3} = \frac{15}{?}$.

Ak použijem krížové pravidlo, dostanem $5 \cdot ? = 15 \cdot 3$. Takže $5 \cdot ? = 45$, z toho mi vyjde, že $? = 9$.

Precvičte si trojčlenku pri riešení úloh. Pozor, v týchto úlohách už nemusia byť len nepriame úmernosti.

3 Ak traja murári postavia múr za 14 hodín, ako dlho to bude trvať 7 murárom?

4 Soňa si našetrila už 35 % z ceny plaviek – presne 7 €. Koľko stoja plavky?

5 Z istého množstva zliatiny sa vylisuje 320 lyžíc po 35 g. Koľko kusov nožov po 55 g sa vylisuje z toho istého množstva zliatiny?

6 Cestu zo Žiliny do Bratislavy prejdeme po diaľnici priemernou rýchlosťou 120 km/h za 1 hodinu a 40 minút. Za ako dlho by sme túto vzdialenosť prešli, keby sme znížili priemernú rýchlosť o 20 km/h?

Teraz počítajte tak, ako vám to najviac vyhovuje.

7 V pekárni napiekli z 25 kg múky 325 koláčov. Koľko kg múky potrebujú, ak chcú napiecť 195 kusov takýchto koláčov?

8 Ak 3 turisti prejdú trasu za 5 hodín, ako dlho bude tá istá trasa trvať šiestim rovnako rýchlym turistom?

9 V školskej jedálni sa stravovalo 350 stravníkov. Za mesiac január za 22 dní zaplatili stravníci spolu 11 550 € (každý platil rovnako). Vo februári boli o 3 pracovné dni menej. Koľko eur spolu zaplatí 350 stravníkov za február?

10 Na úseku dlhom 15 metrov sa koleso otočilo 4-krát. Akú vzdialenosť prešlo, ak sa otočilo 134-krát?

11 Ako dlho môžeme čítať 200-stranovú knihu, ak denne prečítame 8 strán?

12 Premeňte na hodiny a minúty.
a) 2,5 hod. b) 3,25 hod. c) 0,75 hod. d) 1,2 hod.

13 Pamätáte si na pána Miloša, ktorý rýľoval záhradu? Trvalo mu to presne 2,08 hodiny. Uveďte tento výsledok v hodinách, minútach a sekundách.

14 Na hodine matematiky merali žiaci rozmery školského dvora krokmi. Soňa namerala dĺžku 68 krokov a šírku 34 krokov. Neskôr zistila, že na 15 metroch urobila 20 krokov. Aké sú rozmery dvora?

15 V kuchyni chceli upiecť na školský večierok 12 koláčov. Do jedného koláča treba 0,25 kg cukru. V kuchyni majú presne toľko cukru, koľko podľa tohto receptu potrebujú na 12 koláčov. Koľko koláčov upečú, ak sa rozhodnú upiecť sladšie koláče a do každého dajú 0,3 kg cukru?

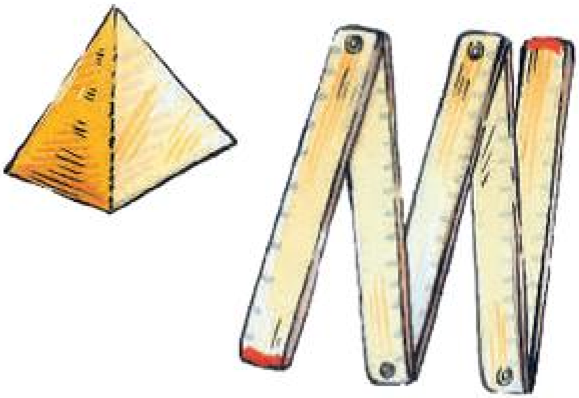
16 Na dvore sú dve nádrže tvaru kocky. Do každej z nich steká voda zo strechy cez odkvap. Jedna nádrž má rozmer 0,5 metra, druhá presne 1 meter. Po 10 hodinách silného dažďa bola menšia z nich naplnená až po okraj. Ako dlho by ešte muselo rovnako silno pršať, aby bola celkom naplnená aj druhá nádoba? (Predpokladajte, že voda tečie do oboch nádrží rovnako intenzívne.)

17 Za 12 dní vykope 10 ľudí 3 km dlhý jarok na uloženie kábla. Za koľko dní vykope 5 rovnako výkonných ľudí rovnako dlhý jarok?

18 Za 18 dní vykope 20 ľudí 3 km dlhý jarok na uloženie kábla. Za koľko dní vykope 30 rovnako výkonných ľudí jarok dlhý 4 km?

19 Tri sliepky znesú za tri dni tri vajcia. Za koľko dní znesie deväť sliepok deväť vajec? (Predpokladáme, že všetky sliepky znášajú vajíčka rovnako často.)

20 Päť revízorov chytí za 6 dní priemerne 70 čiernych pasažierov. Koľko čiernych pasažierov priemerne chytí 9 revízorov za 10 dní, ak sú rovnako výkonní?



Rubriky

Vtáčia búdka 2

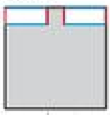
10/1 Štyri dosky majú rozmery 120 mm x 280 mm x 20 mm, dve dosky majú rozmery 140 mm x 140 mm x 20 mm.

10/2 486 mm x 280 mm x 20 mm, 1 126 mm x 120 mm x 20 mm, 562 mm x 242 mm x 20 mm

Jakubove výrobky 2

17/1 Stopu č. **1** zanechalo teleso **4**.
Stopu č. **2** zanechalo teleso **1**.
Stopu č. **3** zanechalo teleso **2**.
Stopu č. **4** zanechalo teleso **3**.

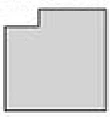
17/2 Stopy 1, 2, 4 majú rovnaký obvod 48 cm, stopa 3 má obvod 44 cm. To, že stopy 1, 2 a 4 majú rovnaký obvod, môžeme zistiť aj bez výpočtov (pozri obrázok 1, na ktorom je sivou výplňou vyznačená stopa 4). Na obrázku 1 sme graficky vyznačili rovnako dlhé úsečky. Z tohto obrázka by malo byť zrejmé, že stopa 2 a stopa 4 majú rovnako veľký obvod.



obr. 1

17/3 5 alebo 4 (závisí to od dohody, či dve šesťuholníkové stopy budeme chápať ako jednu alebo ako dve rôzne stopy). Spodná aj zadná stena zanechajú rovnakú stopu v tvare štvorca so stranou 12 cm (tieto stopy započítavame do celkového počtu ako jednu stopu, nie dve). Predná stena zanechá stopu v tvare obdĺžnika s rozmermi 12 × 10. Horná stena zanechá stopu v tvare obdĺžnika s rozmermi 12 × 8. Bočné steny zanechajú stopu tvaru šesťuholníka.

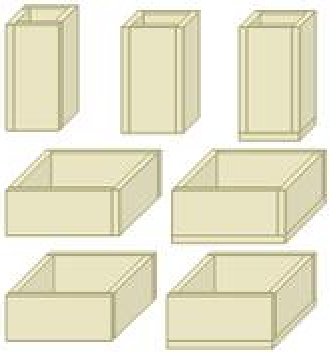
17/4 Budú to telesá 2 a 3.



Vtáčia búdka 3

19/1 Správne odpovede sú:
• 12 cm x 16 cm, ak je spodná doska umiestená zvonka ako na obrázku v zadaní,
• 8 cm x 12 cm, ak spodnú dosku dáme dovnútra (pozri dva obrázky v riešení úlohy 2).
Okrem toho existujú ešte 4 ďalšie riešenia: 24 cm × 28 cm, 28 cm × 32 cm, 30 cm × 30 cm, 26 cm × 26 cm), ktoré dostaneme, ak boky zložíme „naležato".

19/2



Preklápanie 1

22/1 a) Po 2. preklopení bude hore stena s 1 bodkou. b) Po 3. preklopení bude hore stena s 5 bodkami. c) Po 8. preklopení bude hore stena so 6 bodkami.

22/2 a) Po 100. preklopení bude vpredu stena s 5 bodkami. b) Po 150. preklopení bude vpredu stena s 2 bodkami. c) Po 999. preklopení bude vpredu stena s 1 bodkou.
Počet bodiek vpredu sa pravidelne opakuje po štyroch otočeniach: 5, 6, 2, 1, 5, 6, 2, 1, 5, ...
a) Cyklus 5, 6, 2, 1 sa zopakuje 100 : 4 = 25-krát. Preto po 100 otočeniach bude kocka v rovnakej polohe ako na začiatku. Teda vpredu bude vidno 5 bodiek.
b) Keďže 150 : 4 = 37, zvyšok 2, cyklus 5, 6, 2, 1 sa zopakuje 37-krát, a potom kocku ešte 2-krát preklopíme. Bude teda v rovnakej polohe ako po dvoch preklopeniach. Vpredu preto bude toľko bodiek, ako je oproti 5 bodkám: 7 – 5 = 2 bodky.
c) Keďže 999 : 4 = 249, zvyšok 3, cyklus 5, 6, 2, 1 sa zopakuje 249-krát, a potom kocku ešte 3-krát preklopíme. Bude teda v rovnakej polohe ako po troch preklopeniach. Vpredu teda bude toľko bodiek, ako je oproti 6 bodkám: 7 – 6 = 1 bodka.

Preklápanie 2

26/1 a) Vpredu bude 1 bodka, vpravo 5 a hore 4 bodky. b) Vpredu budú 3 bodky, vpravo 5 a hore 1 bodka.

26/2 Prvý raz po šiestich preklopeniach. Potom vždy po každých šiestich preklopeniach.

26/3 Nikdy. V predchádzajúcej úlohe sme zistili, že po 6 preklopeniach sa poloha kocky opakuje. V týchto šiestich polohách sa ani raz nevyskytujú vpredu 4 bodky.

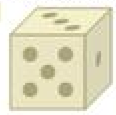
26/4 V úlohe 2 sme zistili, že po každých šiestich preklopeniach sa situácia opakuje. Keďže 99 : 6 = = 16, zv. 3, kocka po 99 preklopeniach bude v rovnakej polohe ako po 3 preklopeniach. Po 3 preklopeniach budú na kocke vpredu 3 body, vpravo 5 bodiek a hore 1 bodka.

Preklápanie 3

32/1 Druhý raz sme preklápali smerom k sebe. Tretí raz sme preklápali smerom vpravo.

32/2 Postupne 3, 6, 5, 1, 2, 3 bodky.

32/2



Preklápanie 4

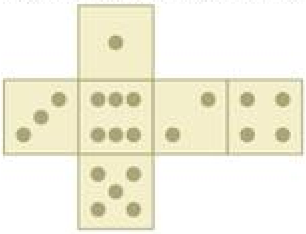
34/1 Výsledný súčet je vždy číslo 15 554.

34/2 Ak štyri štvorciferné čísla, o ktorých sa hovorí v zadaní, napíšeme pod seba, tak v každom stĺpci dostaneme dve dvojice počtov bodiek, ktoré sú oproti sebe.
Napríklad:
5 2 3 2
6 4 2 4
2 5 4 5
1 3 5 3
Súčet takýchto dvojíc je vždy 7. Preto súčet uvedených 4 čísel je rovnaký ako súčet 7 777 + 7 777= = 15 554.

Firma Kocka 1

54/1 10

54/2 Správne riešenie musí mať oproti stene so 6 bodkami stenu so 4 bodkami (súčet 10), oproti stene s 1 bodkou stenu s 5 bodkami (súčet 6) a oproti stene s 3 bodkami stenu s 2 bodkami (súčet 5). Jedno z možných riešení je napr.:



Miera nezamestnanosti 1

67/1 V Košickom.
67/2 Október 2003.
67/3 Od 452 550 do 452 649.
67/4 Má pravdu. Údaje o počte nezamestnaných v prvom diagrame sú v tisícoch a čísla udávajúce počet tisícov sú zaokrúhlené na desatiny. Keby bol počet nezamestnaných 452 548, bola by v diagrame uvedená hodnota 452,5 (452 548 je 452,548 tisíca, po zaokrúhlení na desatiny 452,5 tisíca), tam je však číslo 452,6.

Firma Kocka 2

72/1 Oproti stene s 1 bodkou je stena s 5 bodkami. Oproti stene s 2 bodkami je stena so 6 bodkami. Oproti stene so 4 bodkami je stena s 3 bodkami.
72/2 Oproti stene s 1 bodkou je stena so 6 bodkami. Oproti stene s 2 bodkami je stena so 4 bodkami.
72/3 Súčtami sú čísla 4, 8, 9.

Miera nezamestnanosti 2

80/1 Peter nemá pravdu. V diagrame vidno, že počet nezamestnaných v Trnavskom kraji je približne 34 400 a v Košickom kraji približne 90 600, čo nie je dvojnásobok. Správne by malo tvrdenie znieť: „v Košickom kraji je skoro dvakrát väčšia miera nezamestnanosti ako v Trnavskom kraji," alebo „v Košickom kraji je skoro trikrát viac nezamestnaných ako v Trnavskom kraji."
80/2 Najmenej 2 827 554, najviac 2 829 940.

Miera nezamestnanosti 3

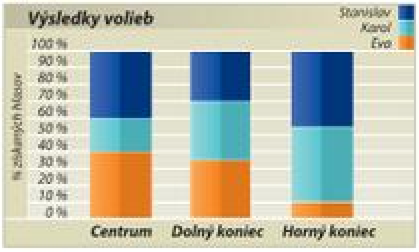
82/1 Nie je správny. V uvedených krajoch nie sú rovnaké počty práceschopných obyvateľov (tento počet je základ pri výpočte miery nezamestnanosti), preto nie je možné mieru nezamestnanosti vypočítať aritmetickým priemerom.
82/2 Keby v uvedených krajoch bol rovnaký počet práceschopných obyvateľov.
82/3 Nie. Je niekoľko možných zdôvodnení:
1. Ak predpokladáme, že v sledovanom období sa nezmenil počet práceschopného obyvateľstva, tak pokles zo 16,5 % na 16 % by predstavoval 0,5 % z práceschopného obyvateľstva, nie 0,5 % nezamestnaných.
2. Podľa počtu nezamestnaných vo dvoch mesiacoch sa nedá presne určiť, koľko ľudí si našlo prácu, keďže niektorí ju medzitým opäť mohli stratiť, a teda ju niekto mohol napr. dvakrát nájsť a dvakrát stratiť.
3. Ak sa zmenil počet všetkých práceschopných obyvateľov, je problém v rôznych základoch, z ktorých sa percentá počítajú.

Voľby starostu 1

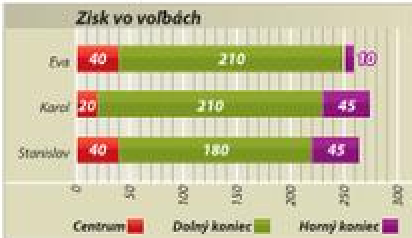
105/1 V Hornom konci.
105/2 30 %
105/3 80 hlasov. Eva získala v tomto okrsku 40 % hlasov, odovzdaných bolo 200 hlasov. 40 % z 200 = 80.
105/4 O 20 hlasov. Existujú dva možné postupy:
1. Zistíme počet hlasov odovzdaných Eve (40 % z 200 je 80) a Stanislavovi (30 % z 200 je 60) a odčítame.
2. Odčítame percentuálne zisky Evy a Stanislava (40 % – 30 % = = 10 %) a určíme 10 % z 200 hlasov.
105/5 Voľby by vyhrala Eva. Zisky jednotlivých kandidátov by boli:
Stanislav: 40 + 5 + 60 = 105,
Rudolf: 30 + 10 + 30 = 70,
Karol: 20 + 15 + 30 = 65,
Eva: 10 + 20 + 80 = 110.

Voľby starostu 2

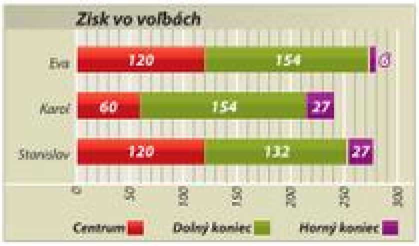
108/1



108/2 a) Karol vyhrá napríklad pri takýchto počtoch hlasov:
Centrum – 100,
Dolný koniec – 600,
Horný koniec – 100.
b) Napríklad:



108/3 Eva vyhrá napríklad pri takýchto počtoch hlasov:
Centrum – 300,
Dolný koniec – 440,
Horný koniec – 60.
Príklad diagramu:



Záujmové krúžky 1

114/1 10
114/2 Niektoré dievča (dievčatá) navštevuje viac krúžkov, preto je zarátané viackrát.
114/3 Napríklad:
„Aktívnejší sú chlapci." – 40 % chlapcov chodí do krúžkov, niektorí aj do viacerých, preto je súčet počtu percent u chlapcov až 45. U dievčat je to iba 44 %.

„Aktívnejšie sú dievčatá.“: Dievčat môže byť na škole viac, preto 44 % dievčat je viac ako 45 % chlapcov.
„Ich aktivita je rovnaká“ – 60 % chlapcov a rovnako aj 60 % dievčat nechodí ani do jedného krúžku.

Záujmové krúžky 2

127/1 Miriam to môže, ale aj nemusí mať správne. Počet percent závisí od počtu dievčat a chlapcov v škole. Miriam by to mala správne iba vtedy, keby chlapcov a dievčat v 7. ročníku bolo rovnako.

127/2 25 % chlapcov + 16 % dievčat = = 20 % chlapcov + 20 % dievčat, teda 5 % chlapcov = 4 % dievčat. Ak je chlapcov napríklad 100, dievčat je 125. Začlenenosť do jednotlivých krúžkov je potom: 20 % do počítačového (25 chlapcov a 20 dievčat z 225 žiakov), 8,$\overline{8}$ % do literárneho (10 chlapcov a 10 dievčat z 225 žiakov), 15,$\overline{5}$ % do športového (10 chlapcov a 25 dievčat z 225 žiakov), 60 % do žiadneho (60 chlapcov a 75 dievčat z 225 žiakov). Graf potom vyzerá takto: (Pozri graf 1)

Výsledky niektorých úloh

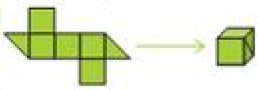
Výsledky všetkých úloh nájdete na webovej stránke vydavateľstva ***www.orbispictus.sk***

7/16 a) 2, b) 2, c) 6, d) 8, e) 7, f) 12, g) 8, h) 7.

11/8 menší, väčšieho, väčší, menšieho

14/4 Sieť kocky je c). Ostatné nie sú siete kocky.

15/6

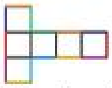


graf 1

16/6 a) Obdĺžnik s rozmermi 5 cm x 1 cm.

b) Nemá riešenie. Rozmery každého kvádra sú určené tromi číslami: prvé určuje dĺžku 4 jeho hrán, druhé dĺžku ďalších 4 hrán, tretie dĺžku posledných 4 hrán. Pomocou týchto troch čísel sú potom určené aj dĺžky strán obdĺžnikov, z ktorých sa skladá sieť kvádra. V zadaní b) sa vyskytujú nie tri, ale štyri rôzne čísla, ktoré určujú dĺžky strán obdĺžnikov: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm.

18/5



22/8 28 možností.

22/9 21 možností.

22/10 13 možností.

26/15 $\frac{7}{56} = 7 : 56 = 0{,}125$ – je to desatinné číslo, ktoré nie je prirodzené, bude teda v modrom, ale nie v zelenom ovále

$\frac{8}{56} = 8 : 56 = 0{,}\overline{142\,857}$, je to racionálne číslo, ale nie desatinné, bude teda v červenom, ale nie v modrom ovále.

30/8 Ich výsledky sú iné len na prvý pohľad, v skutočnosti sú zlomky rovnaké.

38/1 a) 4, b) 20.

38/2 a) 118, b) 109, c) 2, d) 6.

44/6 Napr. doske s rozmermi 1 m a 1 dm, ktorá je hrubá 1 cm.

46/17 Z 12 kociek môžeme zložiť kváder štyrmi spôsobmi: 1 x 1 x 12, 1 x 2 x 6, 1 x 3 x 4 a 2 x 2 x 3. V prvom prípade je jeho povrch 11 552 cm^2, v druhom 9 241,6 cm^2, v treťom 8 779,52 cm^2 a vo štvrtom 7 393,28 cm^2.

57/17 Objem výplne je 6,825 dm^3. Jej hmotnosť je 17,062 5 kg.

61/8 a) 2 000 litrov pritečie za minútu, za hodinu pritečie 120 000 litrov. b) 30 000 hl, c) O 9,00 v utorok ráno.

79/1 a) 19 €, b) 10,26 €, c) 16,62 €.

79/2 Pri dohode o vykonaní práce sa daň z príjmu zaokrúhľuje nadol na celé centy.

79/3 a) 9,02 €, b) 17,53 €, c) 25,62 €.

80/4 a) 100 €, b) 200 €, c) 65 €.

80/5 Pri dohode na 99,99 € je daň po zaokrúhlení 18,99 €. Na účet by pani Eva dostala 81 €.

80/6 199,99 €

80/7 a) 9,50 €, b) 18,46 €, c) 26,97 €. Zaplatí viac o: a) 0,48 €, b) 0,93 €, c) 1,35 €.

80/8 Pretože treba zaokrúhliť na celé centy nadol každú daň a potom vypočítať rozdiel, a nie zaokrúhliť rozdiel týchto daní.

81/1 a) 2,25 €, b) 5,19 €, c) 22,01 €, d) 185,25 €.

81/3 3 300 €

81/4 a) 1 020 €, b) 1 040,4 €, c) 4,04 %.

85/3 Zisk leteckých spoločností mohol byť najviac 130 499 999 korún. Ide o najväčšie prirodzené číslo, ktoré po zaokrúhlení na celé milióny dá 130 miliónov.

85/4 Hľadáme najmenšie číslo, ktoré po zaokrúhlení na desatiny dá 30,2, resp. 10,0. Spoločnosť ČSA získala aspoň 30,15 % z celkového zisku. Spoločnosť Slovenské aerolínie získala aspoň 9,95 % z celkového zisku.

85/5 Súčet by mal byť presne 100. Hodnoty v grafe sú zaokrúhlené na desatiny percenta, preto nie sú presné a ich súčet môže byť iný ako 100 %.

87/15 Nemôžu byť súčasne správne. Ak je pravda, že v každom trinástom manželstve, potom ide o približne 8 %. Ak ide o 13 % manželstiev, tak je to približne každé ôsme manželstvo.

107/5 12, 24, 36 alebo 48.

111/10 To isté pole môžu znázorňovať polia A, D a polia B, C, F.

111/11 Romanovci – B, Markovci – A.

112/3 4; 1,7

117/10 Mierka je 1 : 2 000 000

117/13 60 km

126/10 a) 3,2 hodiny, b) 3,2 hodiny.

133/13 2 hodiny, 4 minúty, 48 sekúnd.

133/17 Za 24 dní.

133/18 Za 16 dní.

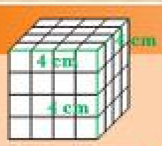
133/19 Za tri dni.

133/20 210 čiernych pasažierov.

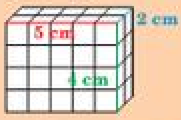
ŤAHÁK – ZOPAKUJME SI TO NAJDÔLEŽITEJŠIE

OBJEM KOCKY A KVÁDRA

Objem kocky = $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\ \text{cm}^3$

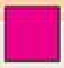


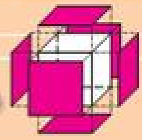
Objem kvádra = $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40\ \text{cm}^3$



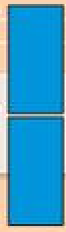
POVRCH KOCKY A KVÁDRA

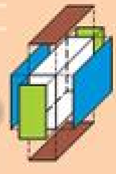
Povrch kocky sa skladá z tých istých štvorcov ako sieť kocky.

Povrch kocky = $6 \cdot$ 



Povrch kvádra sa skladá z tých istých obdĺžnikov ako sieť kvádra.

Povrch kvádra = $2 \cdot$  $+ 2 \cdot$  $+ 2 \cdot$  =
= $2 \cdot ($ green $+$ blue $+$ brown $)$



VÝPOČTY SO ZLOMKAMI

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 9}{9 \cdot 5} = \frac{38}{45}$$

$$\frac{8}{9} - \frac{7}{12} = \frac{8 \cdot 12}{9 \cdot 12} - \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{33}{108}$$

$$\frac{9}{11} \cdot \frac{8}{3} = \left(\frac{\text{súčin čitateľov}}{\text{súčin menovateľov}}\right) = \frac{9 \cdot 8}{11 \cdot 3} = \frac{72}{33}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \left(\text{Číslo } \frac{2}{3} \text{ krát prevrátený zlomok k zlomku } \frac{5}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

Pozor na delenie zlomkov na kalkulačke! Nasledujúci výpočet nie je správny:

$$\cancel{\frac{12}{37} : \frac{3}{25} = 12 : 37 : 3 : 25 = 0{,}004\,324\ldots}$$

Radšej si najprv delenie preveďte na násobenie:

$$\frac{12}{37} : \frac{3}{25} = \frac{12}{37} \cdot \frac{25}{3} = 12 : 37 \cdot 25 : 3 = 2{,}702\,702\ldots$$

PREMIEŇANIE JEDNOTIEK OBJEMU

$1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{dm}^3$

1 hl = 10 dal

1 dal = 10 l

$1\ \text{dm}^3$ = 1 l = 10 dl

1 dl = 10 cl

1 cl = 10 ml

$1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$

$1\ \text{cm}^3$ = 1 ml

$1\ \text{cm}^3 = 1\,000\ \text{mm}^3$

NEPRIAMA ÚMERNOSŤ A TROJČLENKA

Trojčlenku môžeme použiť aj pri výpočte nepriamej úmernosti. Podiely čísel v stĺpcoch zapisujeme podľa smeru šípky.

3	15
5	?

$\frac{5}{3} = \frac{15}{?}$. Takže $5 \cdot ? = 15 \cdot 3$. Takže $? = 9$.

PRIAMA ÚMERNOSŤ A TROJČLENKA

185	296
20	32

Pre tabuľku priamej úmery platí:

- *Podiel čísel v riadkoch je rovnaký:* 185 : 296 = 0,625 20 : 32 = 0,625
- *Podiel čísel v stĺpcoch je rovnaký:* 185 : 20 = 9,25 296 : 32 = 9,25
- *Súčin čísel na uhlopriečkach je rovnaký:* $185 \cdot 32 = 5\,920$ $20 \cdot 296 = 5\,920$

Chýbajúce číslo v tabuľke priamej úmernosti vypočítame pomocou ktorejkoľvek z uvedených troch vlastností, napr. takto:

4	6
10	?

4 : 10 = 6 : ?
Takže $4 \cdot ? = 10 \cdot 6$. Takže ? = 15.

PERCENTÁ A PROMILE

1 % celku je jedna stotina celku.

1 ‰ celku je jedna tisícina celku.

Aj pri výpočtoch s percentami môžeme použiť trojčlenku.

	Meno žiaka alebo žiačky	Šk. rok	Stav učebnice na začiatku šk. roka	Stav učebnice na konci šk. roka
1				
2				
3				
4				

7

ISBN 978-80-8120-710-5

Obsah