MATEMATIKA

8

2. časť

Matematika
pre 8. ročník ZŠ
a 3. ročník gymnázií
s osemročným štúdiom

Orbis Pictus Istropolitana

Autori
PaedDr. Ján Žabka
RNDr. Pavol Černek, CSc.

Lektori
Mgr. Eva Bausová
Mgr. Jana Fraasová, PhD
RNDr. Mgr. Ľudmila Matoušková.
Mgr. Peter Novotný, PhD.
PaedDr. Martina Totkovičová, PhD.
Mgr. Renáta Vestegová

Cover design
Ladislav Blecha

Design
Ing. Michal Pakši

Illustrations
Mgr. art. Juraj Martiška

Foto
Archív Orbis Pictus Istropolitana
Photos.com
Mgr. Ľubica Fedorová

Vydal ©
Orbis Pictus Istropolitana, spol. s r. o.
Miletičova 7, 821 08 Bratislava
v roku 2019 (N)

Zodpovedný redaktor
Mgr. Branislav Hriňák

Jazyková redaktorka
Mgr. Anna Kališková

Skeny
TYPOSET, s. r. o., Bratislava

Zalomenie a predtlačová príprava
DE SIGNO s. r. o., Bratislava

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR pod č. 2018/6042:26-10K0 ako učebnicu matematiky pre 8. ročník základnej školy a 3. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 2. časť. Schvaľovacia doložka má platnosť do 31. augusta 2020.

ISBN 978-80-8120-712-9

www.orbispictus.sk

Milé žiačky a žiaci,

aj v druhom polroku budeme spoznávať prostredníctvom matematiky svet okolo nás. Najskôr si povieme ďalšie vlastnosti trojuholníkov a uhlov v nich.

Zoznámime sa s dôležitými útvarmi – kruhom a kružnicou. Povieme si aj, ako vypočítať ich obvod a obsah. Okrem toho sa dozviete, ako vypočítať obsah ďalších útvarov – rovnobežníka, trojuholníka a lichobežníka, či ako vypočítať objem a povrch hranola.

Dokončíme tiež prácu s kladnými a zápornými číslami a naučíme sa niečo o novom type čísel – racionálnych číslach.

Dôležitou súčasťou matematiky v tomto ročníku je aj šanca a pravdepodobnosť. Stretnete sa s ňou v bežnom živote veľmi často. Vrátime sa tiež k výrazom. Povieme si, ako riešiť rovnice a ako nám môžu pomôcť pri riešení rôznych problémov.

V závere si pri konštrukciách rôznych útvarov precvičíme prácu podľa návodu a natrénujeme vytváranie návodov.

Na uľahčenie orientácie v texte používame opäť piktogramy:

opakovanie

objavovanie a vysvetľovanie učiva

úlohy na precvičenie

úlohy pre tých, ktorých téma zaujala

hry

námety na prácu v skupinách

námety na prácu pri počítači

Samozrejme pokračujeme aj úlohami v rubrike.

Veríme, že aj tento polrok budete úspešní v objavovaní vzťahov a zákonitostí.

Autori

Ján Žabka – Pavol Černek

Matematika

pre 8. ročník ZŠ
a 3. ročník
gymnázií
s osemročným
štúdiom

2. časť

Orbis Pictus Istropolitana
Bratislava

Vážené kolegyne, vážení kolegovia.

Dovoľte, aby sme vás podobne ako v predchádzajúcich učebniciach oboznámili s hlavnými zámermi a cieľmi, na ktoré sme sa v tejto knihe zamerali.

V 2. časti učebnice matematiky pre 8. ročník základných škôl a 3. ročník osemročných gymnázií sa striedajú učivá s geometrickou tematikou s číselnými – aritmetickými a algebraickými učivami.

Začnime poznámkami k aritmetickým a algebraickým častiam učebnice.
V kapitole *Racionálne čísla* dokončíme prácu s kladnými a so zápornými číslami. Od násobenia celých čísel sa dostaneme k ich deleniu, ktoré prirodzene súvisí so zápornými zlomkami. Poznatky o číselných operáciách s desatinnými číslami postupne rozšírime na prácu s kladnými a so zápornými zlomkami. Podrobne sa venujeme výpočtom so zápornými číslami na kalkulačke. Vždy, keď je to možné a vhodné, usilujeme sa zaradiť aj úlohy z bežného života. Záver kapitoly o racionálnych číslach tvoria súhrnné cvičenia, v ktorých si žiaci opäť pripomenú najdôležitejšie myšlienkové postupy.

Učivo o vzorcoch, výrazoch a rovniciach sme rozdelili na dve časti. V prvej z nich sa venujeme úvodným pojmom a rovniciam s jedným výskytom jednej neznámej, v ktorých sa sčituje a odčituje. Postupne pomocou jednotlivých separovaných modelov nechávame žiakov objaviť jednoduché úpravy rovníc, ktoré v závere kapitoly *Vzorce, výrazy a rovnice I* zhrnieme a zovšeobecníme. V druhej kapitole zaoberajúcej sa výrazmi a rovnicami (*Vzorce, výrazy a rovnice II*) sa rovnakým spôsobom venujeme rovniciam, v ktorých vystupuje násobenie a delenie. V oboch týchto častiach možno využiť modely rovníc, s ktorými sa žiaci stretávali už od 5. ročníka (kartičkové úlohy, sčítacie rodinky, úlohy s machuľkami, číselné pyramídy...). Aj vďaka tejto dlhodobej i krátkodobej propedeutike by žiaci mali rovnice s jedným výskytom neznámej zvládnuť pomerne dobre. Osobitnú pozornosť venujeme kontrole správnosti riešenia rovníc a jej využitiu pri riešení slovných úloh.
V ďalšom ročníku sa k rovniciam aj k výrazom vrátime a naučíme sa riešiť rovnice s dvoma výskytmi neznámej. Podrobne sa budeme venovať aj náročnejším slovným úlohám a ďalším modelom rovníc (napr. váhy). Pri riešení týchto slovných úloh prepojíme s rovnicami aj ďalšie metódy (obrázky, rozumné tipovanie...). Neskôr, na strednej škole, sa žiaci k tejto téme vrátia a rozšíria ju o rôzne typy úprav rovníc a ich využitie pri riešení praktických úloh.

Relatívne rozsiahlou kapitolou je *Šanca a pravdepodobnosť*. Pomocou rozličných modelov (tombola, hod kockou, hod mincou, vyberanie skupín, SMS hry) sa usilujeme docieliť, aby žiaci získavali dôležité (aj praktické) skúsenosti s výpočtom šance, resp. pravdepodobnosti. Za dôležité považujeme práve budovanie pravdepodobnostného „citu". Formalizácii pomocou vzorca $p = \frac{m}{n}$ sme sa vyhli aj preto, lebo podľa našich skúseností sa žiaci namiesto pochopenia a precítenia problematiky často bez väčšieho rozmýšľania snažia dosadiť čísla zo zadania úlohy do vzorca. Z rovnakých dôvodov sme propedeutiku pravdepodobnosti zaradili aj do predchádzajúcich ročníkov.
Dovoľujeme si kolegov upozorniť, že v odbornej literatúre sa rozlišuje pojem šanca (ktorý sa vyjadruje pomerom priaznivých a nepriaznivých možností – napr. 1 : 1) a pojem pravdepodobnosť (ktorý sa vyjadruje pomerom priaznivých a všetkých možností, napr. 1 : 2). Tomuto rozlíšeniu sme sa vyhli preto, aby sa žiaci mohli plne sústrediť na získavanie pravdepodobnostných skúseností a nemuseli sa zaťažovať formálnymi definíciami. Uvedené pojmy teda používame – podobne ako v bežnej hovorovej reči – ako synonymá. Z podobných dôvodov nepoužívame vyjadrenie pravdepodobnosti pomocou percent. Tomu sa budeme venovať v opakovaní učiva v 9. ročníku.

Vo veľkej časti učebnice sa venujeme geometrii – rovinným útvarom a ich obsahom, hranolom, ich objemom a povrchom a napokon konštrukčným úlohám.

Veľká časť je venovaná štvoruholníkom. Učivo o štvoruholníkoch sme rozdelili na tri časti.
V prvej časti nazvanej *Rovnobežnosť a štvoruholníky*, objavujeme základné vlastnosti rovnobežníka, kosoštvorca a lichobežníka. Súčasťou týchto kapitol sú aj vlastnosti striedavých a súhlasných uhlov pri rovnobežkách. Pri objavovaní niektorých ich vlastností odporúčame skupinovú prácu (úlohy sú označené príslušným piktogramom). Žiaci si tým zároveň trénujú tímovú prácu, ktorú považujeme za veľmi dôležitú.
Existuje viacero možností triedenia štvoruholníkov, ktoré sa odlišujú najmä tým, či niektoré triedy (napr. množinu rovnobežníkov a množinu lichobežníkov) chápeme ako disjunktné množiny alebo ako podmnožiny. V rôznych odborných textoch sa možno stretnúť s oboma verziami. My sme sa v učebnici priklonili k tomu, že množina lichobežníkov a množina rovnobežníkov sú disjunktné. Odporúčame so žiakmi o tom diskutovať a upozorniť ich na to, že to nie je jediná možná dohoda.
V závere tejto kapitoly sme zaradili prácu s tangramom. Podobné úlohy by mohli pomôcť najmä žiakom, ktorí preferujú manipuláciu s objektmi. Mnohé ďalšie námety na prácu s tangramom možno nájsť na internete.
V druhej časti s názvom *Obsahy geometrických útvarov* odvodzujeme postupne vzorce na výpočet obsahu

rovnobežníka, trojuholníka a lichobežníka. Pri každom útvare ponúkame viac spôsobov odvodenia. Za ideálne považujeme, keď čo najviac z týchto spôsobov objavia samotní žiaci. Do tejto časti sme zaradili aj motiváciu a úlohy na precvičenie súvisiace s katastrom nehnuteľností. Podľa našich skúseností je uvedená téma pre žiakov zaujímavá. Podrobnejšie informácie možno nájsť na internete.

Tretím stretnutím s trojuholníkmi a so štvoruholníkmi je kapitola *Konštrukcie mnohouholníkov*. Konštrukčné úlohy sme rozdelili do troch častí. V prvej sa venujeme konštrukciám ako práci podľa návodu. Jej cieľom ešte nie je samostatné objavenie celej konštrukcie, ale trénovanie jednoduchšej kompetencie, čiže schopnosti narysovať útvar podľa daného postupu.

Pred samotnými konštrukciami sme zaradili prípravnú kapitolu *Dokončujeme konštrukcie*. Za dôležité totiž považujeme postupné budovanie konštrukčných úloh – od vyššie spomenutej práce podľa návodu cez dokončovanie konštrukcií až po samostatné objavovanie jednoduchších konštrukcií.

Pri zápise postupov konštrukcie uprednostňujeme slovný zápis pred zápisom pomocou symbolov. Keďže na základe našich skúseností je pre mnohých žiakov náročné už samotné objavenie správneho postupu, viac sa sústreďujeme na diskusiu o počte riešení a na nájdenie všetkých riešení, resp. na vysvetlenie, že riešenie neexistuje. Učiteľ, samozrejme, môže podľa vlastného uváženia pri zápisoch postupov konštrukcií používať viac symboliky, ako je uvedené v učebnici.

Priestorovú predstavivosť v tejto časti učebnice rozvíjame v kapitole *Hranoly II – Objem a povrch hranola*. Vzorec na výpočet povrchu hranola necháme žiakov objaviť vlastnou úvahou aj hľadať na internete. Odvodenie vzorca na výpočet objemu hranola považujeme za náročné, preto sa viac sústredíme na jeho správnu aplikáciu. Aj v tejto kapitole sme sa snažili zaradiť úlohy z bežného života.

V tejto učebnici, samozrejme, pokračujeme v štruktúre použitej v predchádzajúcich ročníkoch. Nájdete v nej úlohy v rubrike, v ktorých sa zameriavame na aplikácie naučeného učiva v bežnom živote aj na propedeutiku učiva o súradnicovej sústave. Podobne sme zachovali aj štruktúru piktogramov, ktoré môžu výrazne uľahčiť prácu učiteľa v triede.

Výsledky všetkých úloh nájdete na webovej stránke vydavateľstva *www.orbispictus.sk*.

Veríme, že hodiny matematiky budú pre vás aj pre vašich žiakov plné zážitkov, či už z krásy matematiky, objavovania učiva, alebo jeho aplikácie na situácie z bežného života.

Autori

Literatúra:
KUBÁČEK, Z. – ČERNEK, P. – ŽABKA, J. a kol.: **Matematika a svet okolo nás – zbierka úloh.** Vydavateľstvo: Mgr. Pavol Cibulka, Bratislava, rok vydania: 2008, počet strán: 200.

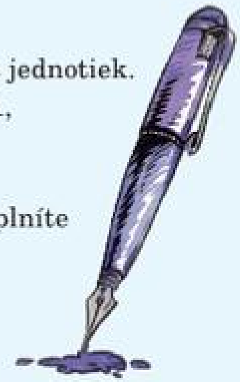
Celé čísla – pokračovanie

Násobenie a delenie celých čísel

Doteraz sme sa venovali sčítaniu, odčítaniu a násobeniu celých čísel. Predtým, ako sa zameriame na delenie dvoch celých čísel, rozšírime svoje vedomosti o násobení celých čísel na násobenie viacerých čísel.

Niekedy môžeme násobiť aj viac celých čísel. Bude to rovnako jednoduché ako násobenie dvoch celých čísel.

1 Už viete, že $(-1) \cdot (-1) = 1$. Vypočítajte nasledujúce príklady. Násobte postupne.
$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$ $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$ $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$
$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$ $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$
$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$



2 V poslednom príklade predchádzajúcej úlohy sme vynásobili 8 mínus jednotiek. Pokračujte v tomto násobení a vynásobte a) 9, b) 10, c) 12, d) 15, e) 21, f) 30 čísel (-1).

3 Ak ste správne vypočítali predchádzajúce dve úlohy, potom určite doplníte nasledujúce vety:
- Ak vynásobím nepárny počet čísel (-1), dostanem výsledok ....
- Ak vynásobím párny počet čísel (-1), dostanem výsledok ....

4 Vypočítajte. Počítajte postupne.
$(-3) \cdot (-2) \cdot (-5)$ $(-4) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-3)$ $(-2) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 3$

Teraz už pravdepodobne veríte, že násobenie viacerých celých čísel bude celkom ľahké. Samozrejme, ak viete násobiť prirodzené čísla.

4. Petrovo pravidlo:

Ak mám vynásobiť niekoľko celých čísel, najprv vynásobím čísla bez znamienok. Ak je počet záporných činiteľov párny, je to zároveň aj výsledok. Ak je tento počet nepárny, do výsledku musím pripísať znamienko mínus.

5 a) Zistite, či je v príkladoch nepárny, alebo párny počet záporných činiteľov.
b) Nenásobte, len rozhodnite, či vo výsledku násobenia bude znamienko mínus.

$2 \cdot (-1) \cdot 5$ $\qquad (-1) \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 5$ $\qquad (-5) \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-5)$

$5 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-1)$ $\qquad (-5) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-1)$

$(-2) \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (-2)$

6 Vypočítajte príklady z predchádzajúcej úlohy.

7 Nájdite čísla pod kartičkami.

$\boxed{A} \cdot 3 = 60$ $\qquad \boxed{B} \cdot 3 = -60$ $\qquad \boxed{C} \cdot (-3) = -60$ $\qquad \boxed{D} \cdot (-3) = 60$

$14 \cdot \boxed{E} = 210$ $\qquad 14 \cdot \boxed{F} = -210$ $\qquad (-14) \cdot \boxed{G} = -210$ $\qquad (-14) \cdot \boxed{H} = 210$

Poradili ste si s príkladmi s kartičkami? Pozrite sa, ako posledný príklad $(-14) \cdot \boxed{H} = 210$ riešili Peter a Jana.

Peter:
Ja som najprv zisťoval znamienko výsledku. **Využil som to, že súčin dvoch čísel s rovnakými znamienkami je kladný** a **súčin dvoch čísel s rôznymi znamienkami je záporný**.
Mám dané: − · ? = +, teda chýbajúci činiteľ bude **záporný**.
Potom som hľadal číslo v príklade bez znamienok: $14 \cdot \boxed{H} = 210$.
Ten riešiť viem: $\boxed{H} = 210 : 14 = 15$.
Hľadané číslo $\boxed{H}$ teda je −15.

Jana:
Ja som sa to snažila urobiť naraz. Vychádzala som z toho, že keď $2 \cdot \mathbf{3} = 6$, tak $\mathbf{3} = 6 : 2$. Vyšlo mi $\boxed{H} = 210 : (-14)$.
No neviem, ako sa delí záporným číslom, lebo sme sa to ešte neučili.
Od teba viem, že výsledok by mal byť −15, preto by malo platiť
$210 : (-14) = -15$.
Z toho mi vychádza, že aj pri delení budeme postupovať podobne ako pri násobení.

! Pri delení dvoch celých čísel postupujem tak, že, rovnako ako pri násobení, najprv určím výsledné znamienko. Potom delím, akoby obidve čísla boli kladné, a k výsledku dopíšem predtým určené znamienko.

deleno	plus	mínus
plus	plus	mínus
mínus	mínus	plus

8 Vyskúšajte si to na príkladoch:

140 : 20 140 : (–20) (–140) : 20 –140 : (–20)

1 044 : 9 (–1 044) : (–9) (–1 044) : 9 1 044 : (–9)

9 Milan tvrdí, že pre určovanie znamienka pri delení platia rovnaké pravidlá ako pri násobení. Presvedčte sa, či má pravdu. Doplňte nasledujúce vety:

- **Súčin** dvoch čísel s rovnakými znamienkami je ....
- **Podiel** dvoch čísel s rovnakými znamienkami je ....
- **Súčin** dvoch čísel s rôznymi znamienkami je ....
- **Podiel** dvoch čísel s rôznymi znamienkami je ....

10 Vypočítajte.

a) –120 : 3 : (–4) b) –120 : (–3) : 4 c) –120 : (–3) : (–4)

11 Určite si poradíte s úlohami s kartičkami, aj keď v nich bude viac čísel. Najprv zistite, či je číslo pod kartičkou kladné, alebo záporné, potom vypočítajte, ktoré číslo sa pod kartičkou skrýva.

–2 · A · 3= –60 –5 · 2 · B = –70 2 · (–4) · 2 · C = 32

2 · D · (–11) = 88 E · (–1) · 16 = 32 F · (–10) · (–2) = –100

(–3) · G · 8 · (–2) = –96 2 · H = –1

Koľko nás bude? (1. časť)

Rozdiel medzi počtom živonarodených detí a zomretých osôb za určité obdobie sa označuje ako prirodzený prírastok. Môže byť kladný alebo záporný. V prípade, že je záporný, hovoríme o prirodzenom úbytku obyvateľstva. Teda namiesto „prirodzený prírastok bol –51 osôb“ môžeme povedať „prirodzený úbytok bol 51 osôb“.

V tabuľke sú uvedené počty živonarodených detí a počty zomretých ľudí na Slovensku v rokoch 2001 – 2005.

rok	*živonarodení*	*zomretí*
2001	*51 136*	*51 980*
2002	*50 841*	*51 532*
2003	*51 713*	*52 230*
2004	*53 747*	*51 852*
2005	*54 430*	*53 475*

Úloha 1: V ktorom z rokov 2001 – 2005 malo Slovensko naposledy prirodzený úbytok? Napíšte rok aj hodnotu tohto prirodzeného úbytku.

Úloha 2: Aký bol prirodzený prírastok na Slovensku za celé sledované obdobie rokov 2001 – 2005?

Úloha 3: Aký bol priemerný ročný prirodzený prírastok na Slovensku za celé sledované obdobie?

Racionálne čísla

Účtovné knihy a farebné čísla ešte raz

V predchádzajúcej kapitole ste videli, že pri delení celých čísel niekedy ako výsledok dostanete záporné desatinné čísla. Na takéto čísla môžete natrafiť aj v bežnom živote.
V minulom polroku ste sa stretli s úlohami z účtovných kníh. V týchto úlohách vystupovali sumy zapísané v celých eurách. Pozrime sa teraz na podobné výpočty, ale už nielen s eurami, ale aj s centami, teda vlastne s desatinnými číslami.
Spomínate si na červené a čierne čísla?

1 Usporiadajte sumy podľa veľkosti od najväčšieho dlhu po najväčšiu hotovosť.
12,64 €; 8,29 €; 3,02 €; 6,84 €; 2,53 €; 4,79 €; 0,38 €; 2,92 €; 2,94 €; 0,09 €; 11,47 €

2 Akú sumu má pani Jana?
a) 4,12 € + 3,45 € b) 4,12 € + 5,45 € c) 7,38 € + 6,71 € d) 6,24 € + 3,99 €

Počítali ste rovnako ako Kamila?

Kamila:
Časti a) a c) boli ľahké. Keďže obidve čísla vyjadrovali hotovosť, stačilo dané čísla sčítať:
4,12 € + 3,45 € = 7,57 € 7,38 € + 6,71 € = 14,09 €
V častiach b) a d) tiež stačilo sčitovať, tentoraz dlhy:
4,12 € + 5,45 € = 9,57 € 6,24 € + 3,99 € = 10,23 €

3 Aký bude výsledok, keď sa sčíta čierne číslo s červeným a čierne číslo je väčšie?
a) 4,82 € + 3,09 € b) 24,87 € + 27,19 €

Kamila:
Je to podobné ako s celými eurami. Keďže je viac hotovosti ako dlhu, výsledok musí byť hotovosť, čiže čierne číslo. Ak chcem zistiť, aká hotovosť, dané čísla odčítam:
4,82 € + 3,09 € = 1,73 € 24,87 € + 27,19 € = 2,32 €

4,82 – 3,09 = 1,73

$$\begin{array}{r} 27{,}19 \\ -\,24{,}87 \\ \hline 2{,}32 \end{array}$$

4 Ako to dopadne, keď je viac dlhu ako hotovosti?
a) 6,82 € + 2,36 € b) 32,81 € + 61,14 €

Kamila:
Keďže bolo viac dlhov, výsledkom bude dlh, čiže červené číslo. Ak chcem zistiť, aký veľký je výsledný dlh, budem opäť odčitovať:
6,82 € + 2,36 € = 4,46 € 32,81 € + 61,14 € = 28,33 €

6,82 – 2,36 = 4,46

$$\begin{array}{r} 61{,}14 \\ -\,32{,}81 \\ \hline 28{,}33 \end{array}$$

5 Vypočítajte nasledujúce príklady. Výsledky napíšte správnou farbou. Počítajte po riadkoch.

8,16 € + 6,02 €	8,16 € + 6,02 €	8,16 € + 6,02 €	8,16 € + 6,02 €
1,69 € + 8,09 €	1,69 € + 8,09 €	1,69 € + 8,09 €	1,69 € + 8,09 €
68,19 € + 60,23 €	68,19 € + 60,23 €	68,19 € + 60,23 €	68,19 € + 60,23 €

6 Je celkovo pani Anna „v čiernych číslach“ alebo „v červených číslach“?
Pani Anna: 32,71 €, 47,64 €, 62,90 €, 70,83 €, 20,13 €.

Pozrite si, ako predchádzajúcu úlohu riešil Jaro.

Jaro

Jaro:
Stačí mi zistiť, či je viac hotovosti, alebo dlhov. Budem počítať postupne. Najskôr sčítam hotovosť:
47,64 € + 70,83 € = 118,47 €.
Potom sčítam dlhy: 32,71 € + 62,90 € + 20,13 € = 115,74 €.
Vidím, že hotovosti je o trochu viac, preto je pani Anna celkovo v čiernych číslach.

7 Sú podnikateľky celkovo „v čiernych číslach“ alebo „v červených číslach“?
Pani Soňa: 38,63 €, 46,28 €, 18,37 €, 24,76 €, 17,35 €.
Pani Katarína: 345,72 €, 820,06 €, 95,48 €, 619,89 €.

8 Vynásobte. Pomáhate si sčítaním?
2 · 71,49 € 2 · 71,49 € 3 · 12,83 € 3 · 12,83 € 5 · 21,49 € 5 · 21,49 €

9 Hotovosť i dlh v eurách a centoch môžeme aj rozdeľovať na rovnaké časti. Vypočítajte.
3,28 € : 2 3,28 € : 2 4,35 € : 3 4,35 € : 3 71,22 € : 6 71,22 € : 6

10 Podarí sa vám doplniť vynechané farebné čísla v účtovných knihách?
23,14 + ... = 1,28 12,83 + ... = 1,99 12,44 + ... = 24,76 11,83 + ... = 28,74

Pomohli ste si ako Filip?

Filip

Filip:
V príklade 23,14 + ... = 1,28 sa dlh zmenšil. Museli sme preto pripočítať hotovosť, o ktorú sa tento dlh zmenšil. Akú veľkú hotovosť sme pripočítali, zistím ľahko porovnaním, o koľko je 23,14 viac ako 1,28:
23,14 − 1,28 = 21,86.
V príklade 12,44 + ... = 24,76 sme pridali toľko hotovosti, že sme sa z červených čísel dostali do čiernych. Najskôr sme teda vynulovali dlh – pridali sme 12,44. Potom sme museli pridať ešte 24,76. Výsledok je preto 12,44 + 24,76 = 37,20.

11 Použite Filipovu metódu a doplňte ďalšie chýbajúce farebné čísla.

13,43 + ... = 5,42	1,72 + ... = 9,32	27,10 + ... = 3,49	12,03 + ... = 3,65
47,02 + ... = 54,08	54,08 + ... = 47,02	63,84 + ... = 5,42	7,49 + ... = 1,14

Kladné a záporné racionálne čísla a výpočty s nimi

V predchádzajúcich úlohách ste videli, že pri počítaní s farebnými desatinnými číslami sa postupuje podľa rovnakých pravidiel ako pri počítaní s farebnými celými číslami. Preto vás asi neprekvapí, keď vám hneď na úvod prezradíme, že existujú aj záporné desatinné čísla a záporné zlomky a že počítanie so všetkými číslami bude mať rovnaké pravidlá ako počítanie s celými číslami.

Spomínate si, ako zapisuje hotovosť a dlh pani Petra? Na rozdiel od pani Jany používa na zapísanie hotovosti kladné čísla a na zapísanie dlhu a výdavkov namiesto červených čísel čísla s mínusom, čiže záporné čísla.

1 V tvare záporných čísel zapíšte tieto farebné čísla: 5; 8; 7,6; 0,08; 23,506; 1,790 4.

2 Usporiadajte sumy podľa veľkosti od najväčšieho dlhu po najväčšiu hotovosť.
–12,64 €; –8,29 €; 3,02 €; –6,84 €; 2,53 €; 4,79 €; –0,38 €; 2,92 €; –2,94 €; 0,09 €; –11,47 €

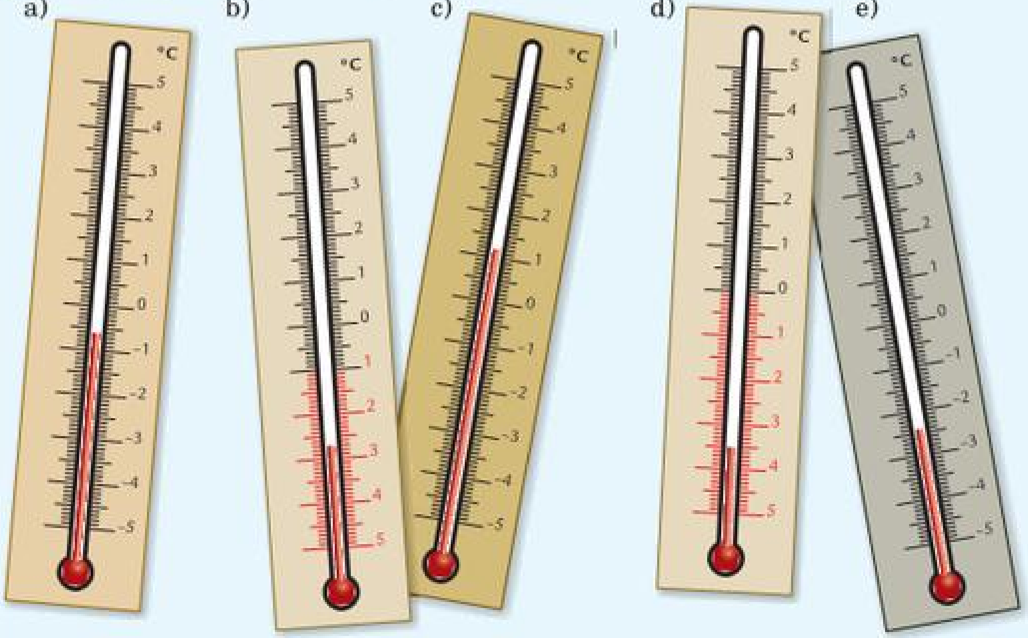
S kladnými a so zápornými desatinnými číslami sa môžete stretnúť aj pri meraní teploty.

3 Usporiadajte teploty od najnižšej po najvyššiu.
2,3 °C; –3,8 °C; 4,1 °C; 16,2 °C; –12,1 °C; –8,4 °C; 0 °C; –3,7 °C; –3,2 °C

Teplotou si môžeme pomôcť aj pri znázorňovaní desatinných čísel na číselnej osi.

4 Aké teploty ukazujú časti teplomerov zobrazené na obrázku?

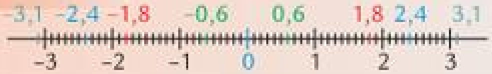
a) b) c) d) e)



5 Zvoľte si číselnú os s dielikom 1 cm a znázornite na nej čísla 0; 0,6; 1,8; 2,4; 3,1; –0,6; –1,8; –2,4; –3,1.

Nakreslili ste rovnaký obrázok ako Soňa?

Soňa:



6 Dopíšte k vyznačeným dielikom na číselných osiach chýbajúce čísla.

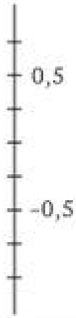
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

7 Zapíšte pomocou kladných a záporných čísel príklady z prvého riadka z úlohy 5 na strane 28.

Porovnajte zápisy Petra a Zuzany.

Peter:
Ja budem všetky záporné čísla dávať do zátvoriek, aby som si nepomýlil znamienka. Takže napr. príklady
8,16 € + 6,02 € a 8,16 € + 6,02 € zapíšem takto:
8,16 € + (–6,02 €) a (–8,16 €) + 6,02 €.

Zuzana:
Ja píšem zátvorky iba vtedy, keď je to nutné. Teda vtedy, keby mali ísť tesne za sebou dve znamienka. Dva Petrove príklady by som zapísala takto:
8,16 € + (–6,02 €) a –8,16 € + 6,02 €.

8 Vypočítajte: –8,16 + (–6,02).

Ako ste počítali vy? Pomocou farebných čísel? To je výborný spôsob. Juraj však počítal pomocou pravidla, ktoré používal na počítanie s celými zápornými číslami:

> **!** Dve **záporné** čísla sčítam tak, že ich sčítam ako **kladné** a potom napíšem výsledok so **znamienkom mínus**.

Jurajov výpočet teda vyzeral takto:

–8,16 + (–6,02) = –14,18 , *lebo* 8,16 + 6,02 = 14,18 .

9 Vypočítajte: –8,16 + 6,02.

Juraj si opäť pomohol pravidlom na počítanie s celými číslami:

> **!** **Kladné** a **záporné** číslo sčítam tak, že ich odčítam, akoby boli obidve kladné – od väčšieho menšie. Do výsledku napíšem také znamienko, aké malo číslo, ktoré je ďalej od nuly.

Jurajov výpočet vyzeral takto: –8,16 + 6,02 = –2,14 *,lebo* 8,16 – 6,02 = 2,14

a ďalej od nuly je číslo –8,16, ktoré je záporné.

> **!** Rovnaké pravidlá platia aj pri počítaní s kladnými a so zápornými zlomkami.

10 Vypočítajte.

a) –8,6 + (–6,5) b) 23,4 + (–7,6) c) $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{8}{3}\right)$

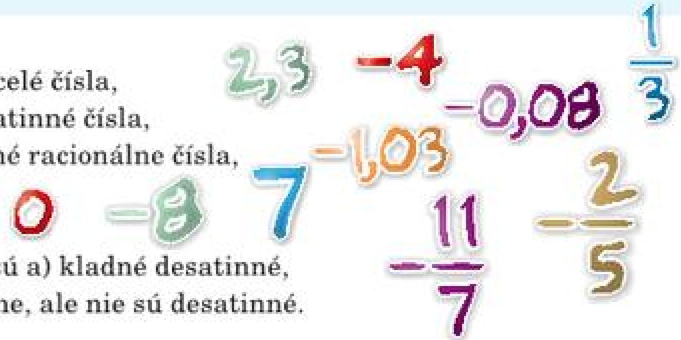
d) –8,6 + 6,5 e) –23,4 + (–7,6) f) $\frac{1}{3}+\left(-\frac{8}{3}\right)$

Všetky takéto kladné a záporné čísla (celé čísla, desatinné čísla, zlomky), s ktorými sme sa stretli, spolu s číslom 0 sa volajú ***racionálne čísla****. Môžeme povedať, že racionálne čísla sú čísla, ktoré vieme zapísať ako zlomok, ktorý má v čitateli celé číslo a v menovateli prirodzené číslo. Racionálne čísla majú konečný desatinný zápis (desatinné čísla) alebo nekonečný periodický desatinný zápis.*

Poznámka:
Pomenovanie racionálne čísla súvisí s anglickým slovom ratio, ktoré znamená podiel, aj s latinským slovom ratio, ktoré sa používalo vo význame výpočet.

11 Povedali sme, že racionálne čísla vieme zapísať ako zlomok, ktorý má v čitateli celé číslo a v menovateli prirodzené číslo. Je aj podiel dvoch záporných celých čísel racionálne číslo? Je aj podiel prirodzeného a záporného celého čísla racionálne číslo? Premyslite si, prečo sme racionálne čísla neopísali ako zlomky, ktoré majú v čitateli aj v menovateli celé číslo, ale obmedzili sme sa iba na zlomky, ktoré majú v menovateli prirodzené číslo.

12 Vypíšte do zošita všetky a) kladné celé čísla, b) záporné celé čísla, c) kladné desatinné čísla, d) záporné desatinné čísla, e) kladné racionálne čísla, f) záporné racionálne čísla.



13 Napíšte príklad dvoch čísel, ktoré sú a) kladné desatinné, ale nie sú celé, b) záporné racionálne, ale nie sú desatinné.

S opačnými racionálnymi číslami to bude podobné ako v prípade celých čísel.

14 Napíšte opačné čísla k číslam 3,8; –2,176; $-\frac{1}{9}$; $\frac{2}{11}$.

Veríme, že úlohu ste vyriešili správne a vaša odpoveď bola –3,8; 2,176; $\frac{1}{9}$; $-\frac{2}{11}$.

> **!** Čísla –3,8 a 3,8 alebo $-\frac{1}{9}$ a $\frac{1}{9}$ sa odlišujú len znamienkom.
>
> Takéto čísla nazývame **navzájom opačné racionálne čísla**.

15 Vypíšte všetky dvojice opačných čísel.

$-3{,}4$ $\quad -\frac{3}{4}$ $\quad \frac{4}{3}$ $\quad 3{,}4$ $\quad -4{,}3$ $\quad 4{,}3$ $\quad -\frac{4}{3}$ $\quad \frac{3}{4}$

16 Vypočítajte: –8,16 – (–6,02).

Pomohli ste si pravidlom pre odčítanie čísla?

> **!** Odčítať dané číslo je to isté, ako pripočítať číslo k nemu opačné.
> Takže –8,16 – (–6,02) je to isté ako –8,16 + 6,02 a to je –2,14.

17 Vypočítajte.

a) –8,6 – (–6,5) b) 7,6 – 23,4 c) $-\frac{1}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)$ d) –8,6 – 6,5

e) –23,4 – (–7,6) f) $\frac{1}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)$

Spomínate si, čo je absolútna hodnota čísla?

> **!** Absolútna hodnota kladného čísla je to isté číslo: $|37{,}4| = 37{,}4$

> **!** Absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné: $|-37{,}4| = 37{,}4$

18 Prečítajte zápisy s absolútnymi hodnotami. Ktoré sú správne a ktoré nesprávne?

a) $|-7{,}18| = 7{,}18$ b) $|7{,}18| = -7{,}18$ c) $|7{,}18| = |-7{,}18|$

19 Vypočítajte.

a) $|-3{,}2|$ b) $\left|-\frac{8}{5}\right|$ c) $\left|\frac{1}{3}\right|$ d) $|3{,}892|$ e) $|-2{,}15|$ f) $|0|$

20 Ku každému z čísel 7,36; 0,21; –6,4; $-\frac{3}{8}$ nájdite číslo, ktoré je od neho rôzne, ale má rovnakú absolútnu hodnotu.

Daniela:
Ja si radšej pamätám, že absolútna hodnota daného čísla je jeho vzdialenosť na číselnej osi od nuly.

21 Zvoľte si číselnú os a znázornite na nej číslo 0. Náhodne si zvoľte napravo aj naľavo od nuly 3 body. Ku každému z týchto 6 bodov – čísel – nájdite na číselnej osi číslo, ktoré je od neho rôzne, ale má rovnakú absolútnu hodnotu.

22 K číslu a) 12,08; b) –0,17; c) $\frac{1}{3}$ nájdite čísla, ktoré majú absolútnu hodnotu o 1 väčšiu ako dané číslo. Pozor, také čísla sú vždy dve.

Aj pre násobenie a delenie racionálnych čísel platia tie isté pravidlá ako pre násobenie a delenie celých čísel:

! Najprv určím výsledné znamienko. Potom násobím alebo delím, akoby boli obidve čísla kladné.

krát/deleno	plus	mínus
plus	plus	mínus
mínus	mínus	plus

23 Vypočítajte.
$5 : 20$ $5 : (-20)$ $(-5) : 20$ $-5 : (-20)$

24 Precvičte si delenie celých čísel. Výsledok napíšte v tvare desatinného čísla. Dajte si pozor na správne znamienko vo výsledku.
$6 : (-2)$ $9 : 18$ $(-6) : 12$ $-10 : (-40)$ $2 : (-16)$ $-3 : 8$

25 Vypočítajte a výsledky napíšte v tvare desatinného čísla.
$0{,}4 \cdot (-0{,}2)$ $-0{,}4 : (-0{,}2)$ $-0{,}2 : 0{,}4$ $-0{,}2 \cdot (-0{,}4)$
$3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$ $-3 : \left(-\frac{1}{6}\right)$ $-3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$ $3 : \left(-\frac{1}{6}\right)$

26 Poradíte si aj s viacerými činiteľmi?
$-2 \cdot (-0{,}5) \cdot (-0{,}25) \cdot 4$ $0{,}6 \cdot (-0{,}2) \cdot (-100)$ $-\frac{1}{2} \cdot (-1{,}8) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$

Možno ste premýšľali, či sa so zápornými číslami dá počítať aj na kalkulačke.

27 Preskúmajte svoju kalkulačku (aj tú v mobilnom telefóne) a nájdite, ktoré tlačidlá by mohli súvisieť so zápornými číslami.

Asi ste na svojej kalkulačke našli tlačidlo [–]*. Okrem toho je na kalkulačkách zvyčajne aj tlačidlo* [+/–]*. Práve toto druhé tlačidlo často slúži na zadanie záporného čísla.*

28 Zistite, či sa na vašej kalkulačke zadáva záporné číslo pomocou tlačidla [–], alebo [+/–]. Zadajte číslo –2 a vypočítajte príklad –2 – 5.

***V**ýpočty so zápornými číslami často obsahujú zátvorky. So zápornými racionálnymi číslami počítame podľa rovnakých pravidiel a postupov ako s kladnými racionálnymi číslami. Do kalkulačky však treba správne zadať záporné čísla.*

29 Skúste na kalkulačke vypočítať príklad:
–0,5 – (–2).

V akom poradí ste vyťukávali jednotlivé tlačidlá na kalkulačke? Ako Peter, Soňa či Karol? Alebo nejako inak?

Karol:	–	0	,	5	–	(	–	2	)	=
Soňa:	0	,	5	+/–	–	2	+/–	=		
Peter:	+/–	0	,	5	–	(	+/–	2	)	=

***R**óbert si povedal, že vie, že –0,5 – (–2) je to isté ako –0,5 + 2 a to je to isté ako 2 – 0,5. Takže namiesto práce so zápornými číslami na kalkulačke najskôr využil pravidlá, ktoré pozná, a až na konci chcel použiť kalkulačku. Po použití pravidiel mu však vyšiel veľmi jednoduchý príklad 2 – 0,5, takže kalkulačku nakoniec nepotreboval.*

30 Vypočítajte na kalkulačke príklady z úloh 10, 17, 25 a 26 na predchádzajúcich stranách. Vyšli vám rovnaké výsledky ako pri výpočte bez kalkulačky?

31 Občas sa môžete stretnúť aj s náročnejšími číselnými výrazmi. Vypočítajte najskôr bez kalkulačky, potom na kalkulačke skontrolujte, či dostanete rovnaký výsledok.

a) $-0{,}25 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{1}{9} - 2$

b) $\dfrac{-\frac{1}{2} - (3 : 4)}{1{,}5 + \left(-\frac{1}{4}\right)}$

c) $\left(-2 + \left(-\frac{9}{8}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right) - \left(-\frac{7}{4}\right)$

d) $\dfrac{2{,}7 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)}{\frac{2}{3} - \left(-0{,}5 + \left(-\frac{1}{8}\right)\right)}$

e) $2 \cdot \left(-\frac{3}{8} - \dfrac{-\frac{3}{16} + (-8) : 32}{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - 1{,}5\right)}\right)$

Krížom-krážom s racionálnymi číslami

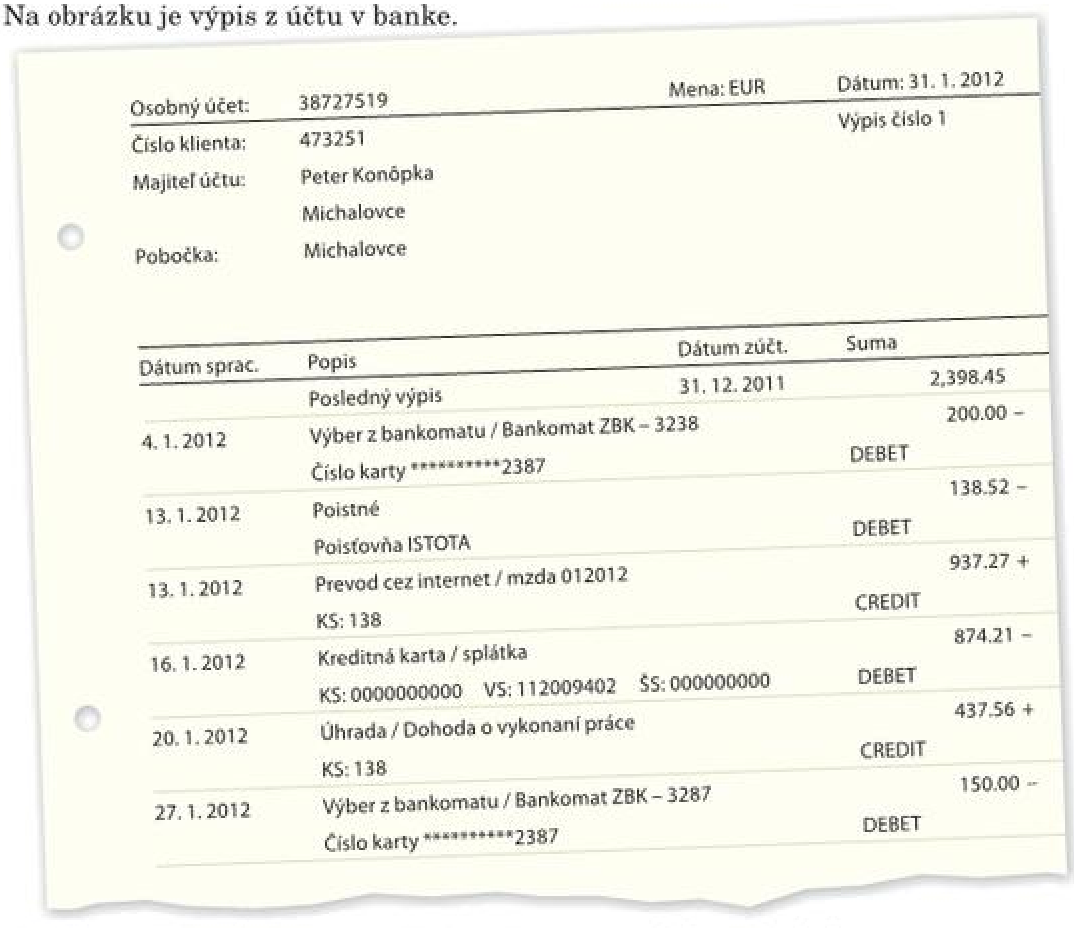
1 Vypočítajte.

$(-2) : (-10)$	$(-8) : 16$	$12 : (-15)$	$-39 : 30$	$(-1) : (-1)$
$7 : 28$	$-17 : (-4)$	$-4 : 18$	$0 : (-201)$	$-13 : 0$

2 Ktoré čísla sa skrývajú pod kartičkami? Najprv zistite, či je číslo pod kartičkou kladné, alebo záporné.

A : 2 = –1,4	–5 : B = –2	–8 : C = 16	D : (–11) = 6
E : 1,3 = 1,3	F : (–3) = –1,5	G : 2,5 = –5	(–24) : H = –1,2

3 Na obrázku je výpis z účtu v banke.



Osobný účet: 38727519 — Mena: EUR — Dátum: 31. 1. 2012
Číslo klienta: 473251 — Výpis číslo 1
Majiteľ účtu: Peter Konôpka, Michalovce
Pobočka: Michalovce

Dátum sprac.	Popis	Dátum zúčt.	Suma
	Posledný výpis	31. 12. 2011	2,398.45
4. 1. 2012	Výber z bankomatu / Bankomat ZBK – 3238 Číslo karty ***********2387		200.00 – DEBET
13. 1. 2012	Poistné Poisťovňa ISTOTA		138.52 – DEBET
13. 1. 2012	Prevod cez internet / mzda 012012 KS: 138		937.27 + CREDIT
16. 1. 2012	Kreditná karta / splátka KS: 0000000000 VS: 112009402 ŠS: 000000000		874.21 – DEBET
20. 1. 2012	Úhrada / Dohoda o vykonaní práce KS: 138		437.56 + CREDIT
27. 1. 2012	Výber z bankomatu / Bankomat ZBK – 3287 Číslo karty ***********2387		150.00 – DEBET

a) Mal pán Konôpka v januári 2012 vyššie príjmy alebo výdavky?
b) O koľko boli príjmy pána Konôpku na účte v januári 2012 vyššie ako jeho výdavky?
c) Aký je stav účtu (zostatok) na konci januára 2012?

4 Vypočítajte. Výsledky napíšte v tvare zlomku a overte na kalkulačke.

a) $\frac{3}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right)$ b) $\frac{3}{8} : \left(-\frac{1}{4}\right)$

c) $-0{,}12 : \frac{1}{6}$ d) $0{,}12 \cdot \frac{1}{6} - 0{,}1$

5 Aký výškový rozdiel je medzi dvoma miestami, ktorých nadmorské výšky sú uvedené v tabuľke?

1. miesto	*37,5*	*–37,5*	*–37,5*	*37,5*	*3,7*	*3,7*	*–3,7*	*–3,7*
2. miesto	*21,4*	*21,4*	*–21,4*	*–21,4*	*16,2*	*–16,2*	*16,2*	*–16,2*
výškový rozdiel								

6 Vypočítajte hodnoty výrazu $P = r \cdot \frac{2}{3}$ pre a) $r = 6$, b) $r = 12$, c) $r = -\frac{9}{11}$.

7 Napíšte, v ktorom meste bola vyššia teplota a o koľko.

Komárno	*Námestovo*	*Kde bola vyššia teplota*	*O koľko?*
5,4 °C	*–2,8 °C*		
3,1 °C	*–8,1 °C*		
3,5 °C	*4,9 °C*		
0 °C	*–1,3 °C*		
–3,5 °C	*–12,8 °C*		

Zrážky a kaktusy

Pre pestovateľov kaktusov sú zaujímavé údaje o množstvách zrážok v oblastiach, kde kaktusy rastú. O Mexiku sme sa v časopise pre kaktusárov dočítali:

Mexiko sa z pohľadu pestovateľa kaktusov delí na tri oblasti: Prvé dve z nich sú:

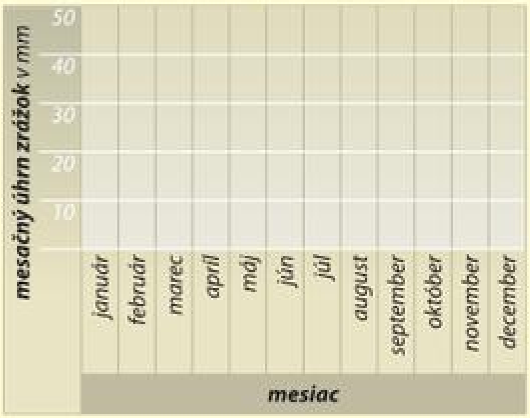
- oblasť s obdobím sucha v prvých mesiacoch roka, obdobie dažďov sa začína v apríli, prvý slabší vrchol dosahuje v júli s poklesom zrážok v auguste a s maximom zrážok v mesiacoch september až október,
- oblasť s maximom zrážok v máji až júni, ktorých množstvo sa postupne znižuje ku koncu roka a obdobie sucha je v prvých mesiacoch roka.

Úloha 1: Nasledujúci graf množstva zrážok patrí k jednej z uvedených oblastí. Ku ktorej – k prvej alebo k druhej? Vysvetlite, prečo oblasť, ktorú ste nevybrali, nevyhovuje.

Text článku v časopise pre kaktusárov pokračuje:

Treťou oblasťou je Baja California a priľahlé časti štátu Sonora. Tu sa obdobie sucha začína v druhom až treťom mesiaci roka a trvá do prvej polovice roka, obdobie dažďov dosahuje svoj vrchol v auguste až septembri a pozvoľna doznieva až do konca januára.

Úloha 2: Prekreslite do zošita tento obrázok a nakreslite doň graf množstva zrážok, ktorý by podľa informácií v článku mohol zodpovedať oblasti Baja California. V období sucha voľte hodnoty pod 10 mm, vo vrchole obdobia dažďov nad 40 mm.

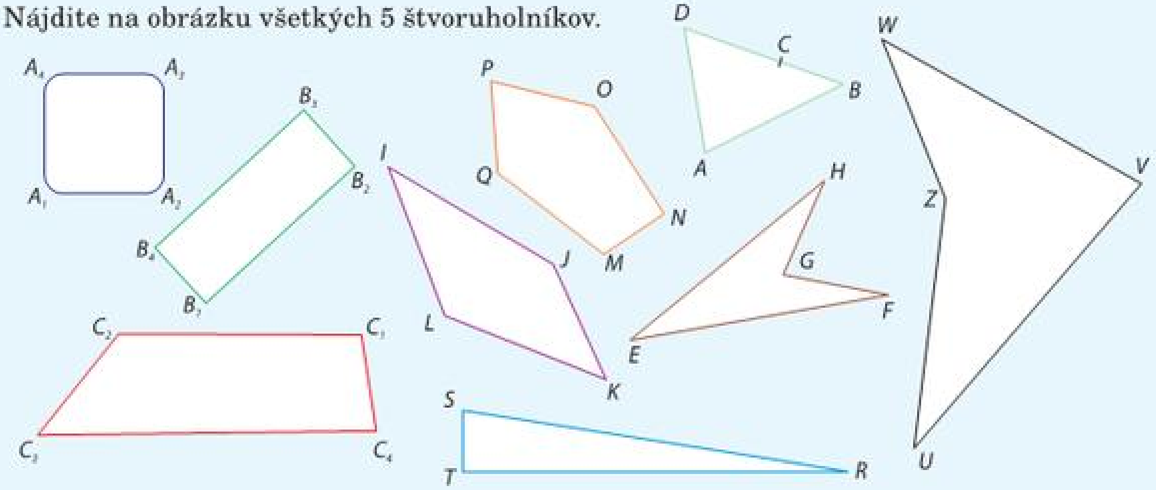


ROVNOBEŽNOSŤ A ŠTVORUHOLNÍKY 8

Štvoruholníky

V bežnom živote sa často stretnete s objektmi, ktorých tvar zodpovedá rôznym geometrickým útvarom. V predchádzajúcej geometrickej kapitole sme sa venovali trojuholníkom. Teraz sa zameriame na štvoruholníky.

1 Nájdite na obrázku všetkých 5 štvoruholníkov.



Veríme, že sa vám podarilo nájsť všetkých päť štvoruholníkov, čiže útvarov, ktoré majú 4 vrcholy a sú ohraničené 4 stranami. Štvoruholníky pomenúvame podobne ako trojuholníky: pomocou vrcholov, ktoré čítame za sebou v smere alebo proti smeru hodinových ručičiek. Úsečky, ktoré sú spojnicami dvoch nesusedných vrcholov, voláme uhlopriečky štvoruholníka.

2 Nájdite ďalšie štyri názvy štvoruholníka *KOZA* a vypíšte jeho uhlopriečky.

3 Medzi štvoruholníkmi v úlohe 1 nájdite všetky štvoruholníky, v ktorých a) jedna uhlopriečka neleží v štvoruholníku, b) sa niektoré dva jeho body nemusia „vidieť" (ak si štvoruholník predstavíme napríklad ako byt), c) dá sa v ňom hrať „na skrývačku".

4 Nakreslite tri a) trojuholníky, b) štvoruholníky, z ktorých sa dá zložiť trojuholník.

Pomohli ste si pri riešení tejto úlohy ako Natália?

Natália:
Ja som to riešila naopak. Najskôr som si nakreslila výsledný trojuholník a ten som potom rozdeľovala.

5 Narysujte a) dva rôzne štvoruholníky, b) päť rôznych štvoruholníkov, ktorých strany merajú 3 cm, 4 cm, 5 cm a 6 cm.

6 Zvoľte si 4 body tak, aby boli vrcholmi 3 rôznych štvoruholníkov.

7 Narysujte do zošita štvoruholník. Odmerajte všetky štyri jeho vnútorné uhly a sčítajte ich. Komu v triede vyšlo najviac?

Aj vám vyšli všetky výsledky približne rovnaké, a to 360°?

8 Pokúste sa zdôvodniť, prečo je súčet vnútorných uhlov v každom štvoruholníku presne 360°.

Porovnajte svoje zdôvodnenie s Karolovým.

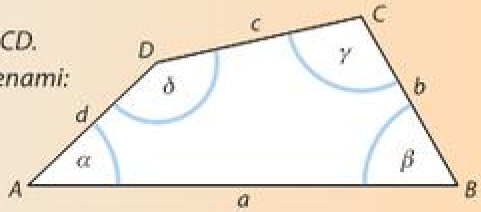
Karol:
Nakreslil som si štvoruholník a rozdelil som ho na dva trojuholníky. V každom trojuholníku je súčet vnútorných uhlov presne 180°. Takže v štvoruholníku musí byť súčet uhlov $2 \cdot 180° = 360°$.

Pavla:
No dobre, ale dá sa na dva trojuholníky rozdeliť každý štvoruholník?

Karol:
Dá, vyskúšaj si to.

9 Má Karol pravdu?

Poznámka:
Najčastejšie budeme pre štvoruholník používať označenie ABCD. Strany tohto štvoruholníka budeme označovať malými písmenami: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Jeho uhly budeme označovať gréckymi písmenami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takto:
$\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $\sphericalangle CDA = \delta$.



10 V štvoruholníku $ABCD$ sú dané uhly $\alpha = 35°$, $\gamma = 65°$, $\delta = 100°$. a) Určte výpočtom veľkosť uhla β. b) Narysujte štvoruholník $ABCD$ s danými uhlami.

11 Určte veľkosť zvyšných dvoch uhlov štvoruholníka, ak viete, že dva uhly merajú 60° a 74° a viete, že dva uhly štvoruholníka majú rovnakú veľkosť.

12 Nájdite všetky tri riešenia predchádzajúcej úlohy.

13 Narysujte a) jeden, b) štyri štvoruholníky $ABCD$, pre ktoré platí: $a = 5$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 40°$.

Malý návrat k trojuholníkom a uhlom

Ak poznáme veľkosti troch strán trojuholníka, vieme trojuholník narysovať. Nie každé tri kladné čísla však môžu byť dĺžkami strán trojuholníka.

1 Sformulujte podmienku, ktorá musí platiť pre tri kladné čísla, aby boli dĺžkami strán nejakého trojuholníka.

Pozrime sa spoločne, ako to bude, keď budeme poznať dĺžku jednej strany a veľkosť dvoch uhlov, ktoré sú k nej priľahlé.

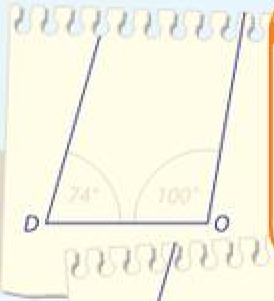
2 Ak taký trojuholník existuje, zostrojte trojuholník DOM, ak je dané:
$|DO| = 5{,}4$ cm, $|\sphericalangle ODM| = 74°$ a okrem toho ešte poznáme a) $|\sphericalangle DOM| = 47°$, b) $|\sphericalangle DOM| = 100°$, c) $|\sphericalangle DOM| = 105°$, d) $|\sphericalangle DOM| = 106°$, e) $|\sphericalangle DOM| = 107°$, f) $|\sphericalangle DOM| = 140°$.

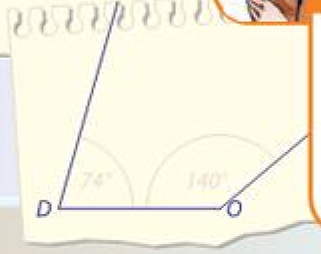
3 Aj vy ste zvolili pri rysovaní v prvom prípade takýto postup?

1. *Strana **DO**; $|DO| = 5{,}4$ cm,*
2. *uhol **ODX**; $|\sphericalangle ODX| = 74°$,*
3. *uhol **DOY**; $|\sphericalangle DOY| = 47°$,*
4. *bod **M**; **M** je priesečník polpriamok **DX** a **OY**,*
5. *trojuholník **DOM**.*

Ak nie, urobte to teraz pre všetky prípady zo zadania.

4 V niektorých prípadoch v predchádzajúcej úlohe požadovaný trojuholník neexistuje. Viete vysvetliť prečo?





Jano:
Mne vyšiel trojuholník iba v časti a) a b). Pritom v časti b) sa mi nezmestil do zošita.

Daniela:
Máš pravdu. V časti f) sa priamky určite nepretnú, takže trojuholník sa nedá narysovať.

Jano:
V častiach c), d) a e) sú tie dve polpriamky *DX* a *OY* rovnobežné alebo „takmer" rovnobežné. Voľným okom neviem povedať, či sa pretnú alebo nepretnú.

Kamila:
Poradím vám. V každom z piatich zadaní si sčítajte dané uhly a budete to vedieť povedať.

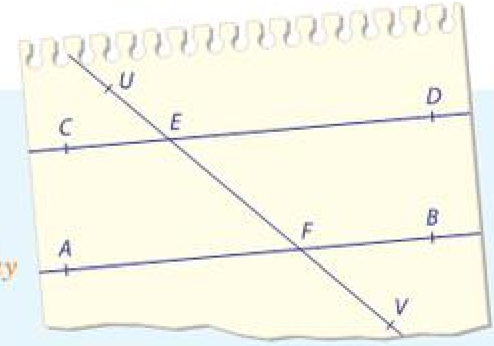
Daniela:
To je maličkosť:
a) 74° + 47° = 121°, b) 74° + 100° = 174°, c) 74° + 105° = 179°, d) 74° + 106° = 180°, e) 74° + 107° = 181°, f) 74° + 140° = 214°.

Jano:
A je to jasné!

5 Skúste dokončiť, ako Jano prišiel na to, v ktorých prípadoch trojuholník existuje a v ktorých nie. Ak sa vám to nepodarí, pozrite si riešenie tejto úlohy.

6 Pre ktoré veľkosti uhla DOM má úloha 2 riešenie a pre ktoré veľkosti nemá riešenie?

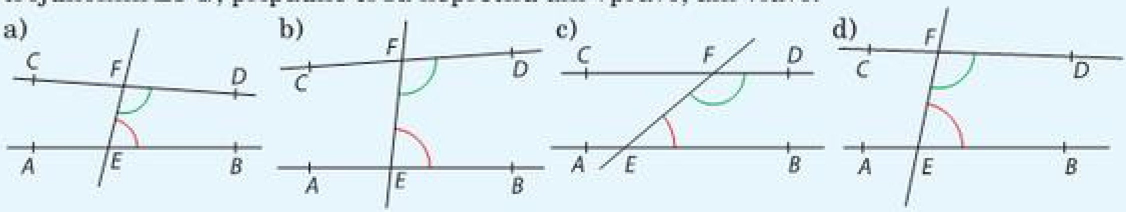
Striedavé a súhlasné uhly



V predchádzajúcich úlohách sme zisťovali, kedy sa dve priamky pretnú a kedy nie.

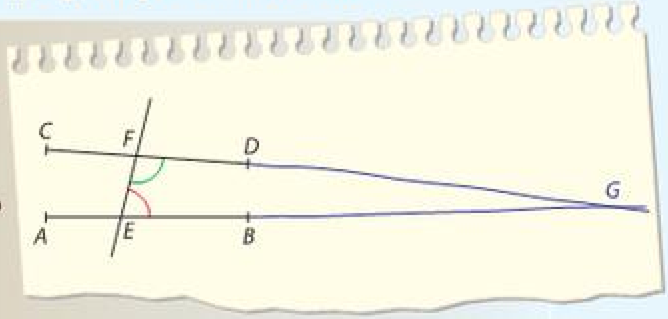
Priamku UV na obrázku, ktorá pretína dve priamky AB a CD, voláme ***priečka priamok*** *AB a CD.*

1 Len odmeraním dvoch vyznačených uhlov zistite, či sa priamky na obrázku pretnú vpravo a vznikne trojuholník EFG, alebo sa pretnú vľavo a vznikne trojuholník EFG, prípadne či sa nepretnú ani vpravo, ani vľavo.



Poradili ste si s časťami a) a c) predchádzajúcej úlohy rovnako ako Jano?

Jano:
Na obrázku a) mi vyšlo, že priamky *CD* a *AB* sa pretnú vpravo. Vyznačené uhly merajú 100° a 76°, to je spolu 176°. Je to menej ako 180°, preto keby sme priamky napravo predĺžili, preťali by sa v nejakom bode *G*. Dostal by som vpravo trojuholník *EFG*.



Na obrázku c) merajú uhly spolu 180°. Myslím si, že priamky *AB* a *CD* sa v tomto prípade nepretnú. Sú to rovnobežky.

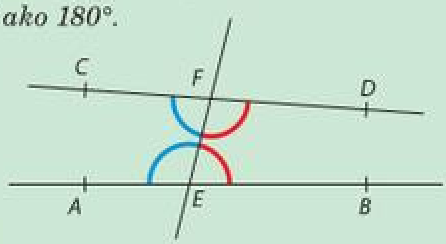
Pre priamky AB a CD na obrázku vždy musí nastať jeden z týchto troch prípadov:

- *pretnú sa vpravo a vytvoria trojuholník EFG,*
- *pretnú sa vľavo a vytvoria trojuholník EFG,*
- *nepretnú sa ani vpravo, ani vľavo, čiže sú to rovnobežky.*

Pozrime sa na prvé dva prípady:

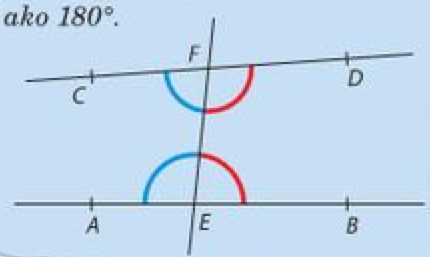
***Pretnú sa vpravo a vytvoria trojuholník EFG.** Vtedy:*

- *súčet vyznačených červených uhlov musí byť menší ako 180°,*
- *súčet vyznačených modrých uhlov musí byť väčší ako 180°.*



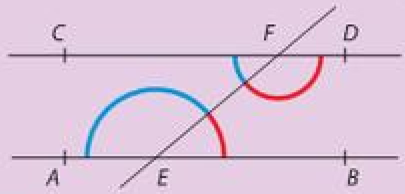
***Pretnú sa vľavo a vytvoria trojuholník EFG.** Vtedy:*

- *súčet vyznačených červených uhlov musí byť väčší ako 180°,*
- *súčet vyznačených modrých uhlov musí byť menší ako 180°.*

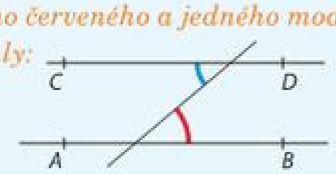


Keď sa pozrieme na prvé dva prípady, tak nám vychádza, že tretí prípad nastane vtedy, ak súčet vyznačených modrých uhlov aj súčet vyznačených červených uhlov bude 180°.

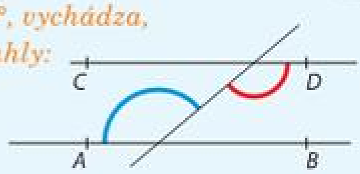
Ak sú priamky rovnobežné, je súčet vyznačených uhlov rovnakej farby 180°.



Keďže aj súčet vyznačených susedných uhlov – jedného červeného a jedného modrého – je 180°, vychádza, že tieto dva uhly:

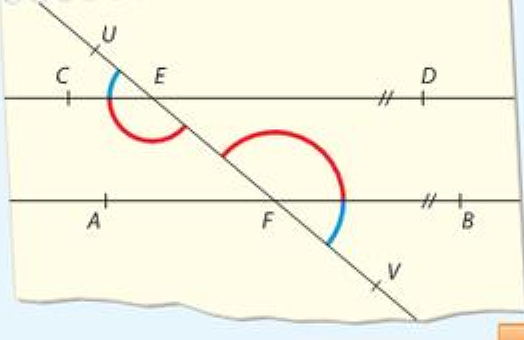


aj tieto dva uhly:

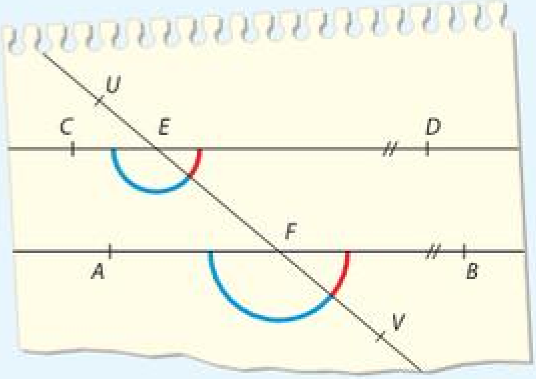


musia byť pri rovnobežkách rovnako veľké. Táto vlastnosť uhlov je dôležitá, a preto dostala svoje pomenovanie.

*Ak sú priamky AB a CD rovnobežné, tak dvojicu uhlov CEF a EFB (sú označené červenou farbou) voláme striedavé uhly pri rovnobežkách alebo skrátene **striedavé uhly**. Aj dvojicu uhlov BFV a CEU (sú označené modrou farbou) voláme **striedavé uhly**.*



2 Na obrázku sú ešte dve dvojice striedavých uhlov. Prekreslite si obrázok voľnou rukou a farebne vyznačte zvyšné dve dvojice striedavých uhlov.



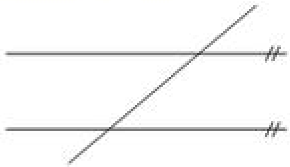
*Okrem striedavých uhlov poznáme aj súhlasné uhly. Dvojicu uhlov CEF a AFV voláme súhlasné uhly pri rovnobežkách alebo skrátene **súhlasné uhly**. Aj uhly DEF a BFV sú **súhlasné uhly**.*

3 Na obrázku sú ešte dve ďalšie dvojice súhlasných uhlov. Určte ich.

Keď sme sa naučili nové pomenovania uhlov, môžeme zhrnúť:

> **!** Ak sú dve rovnobežky preťaté priečkou, tak sú zhodné aj príslušné súhlasné uhly, aj príslušné striedavé uhly.

4 Prekreslite si do zošita voľnou rukou obrázok a rovnakou farbou vyznačte všetky dvojice striedavých uhlov.

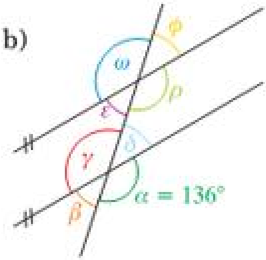


5 Prekreslite si obrázok ešte raz a rovnakou farbou vyznačte všetky dvojice súhlasných uhlov.

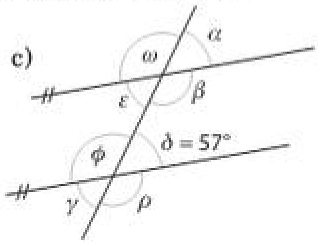
6 Na každom z obrázkov sú rovnobežky preťaté priečkou. Vypočítajte veľkosti vyznačených siedmich uhlov.

a)

b)



c)



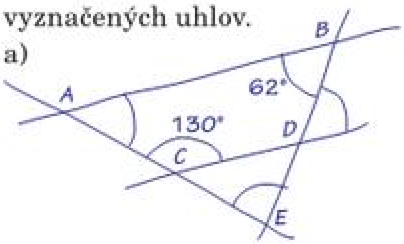
Vyriešili ste časť c) rovnako ako Viera?

Viera:
Uhol α bude merať rovnako ako uhol δ, teda 57°, pretože α a δ sú súhlasné uhly a tie majú rovnakú veľkosť. Uhol ε bude mať takú istú veľkosť, lebo je striedavý s uhlom δ. Vidím, že okrem toho je aj vrcholový k uhlu α. Posledný uhol, ktorý bude merať 57°, je uhol γ.
Uhol ρ bude merať 123°, lebo je susedný s uhlom δ a susedné uhly merajú spolu 180°. Rovnako, čiže 123°, budú merať aj uhly ϕ, ω a β.

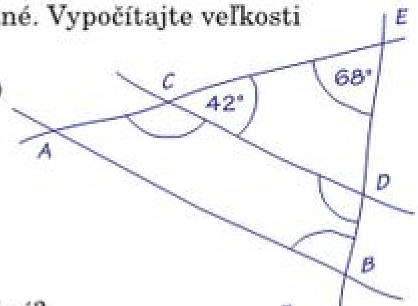
7 V predchádzajúcej úlohe nájdite jednu dvojicu a) striedavých, b) súhlasných uhlov, ktoré sa **nerovnajú**.

8 Priamky AB a CD na obrázku sú rovnobežné. Vypočítajte veľkosti vyznačených uhlov.

a)

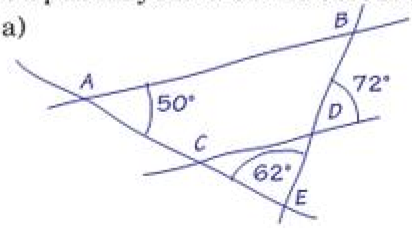


b)

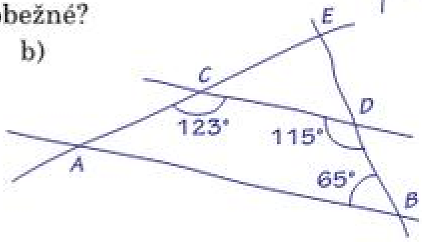


9 Sú priamky AB a CD na obrázku rovnobežné?

a)

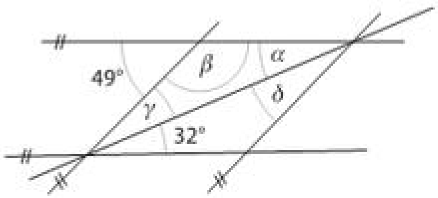


b)



10 V časti b) predchádzajúcej úlohy je jeden číselný údaj o uhloch zbytočný. Teda ak ho vynecháme, aj tak musia byť priamky AB a CD rovnobežné. Ktorý údaj to je?

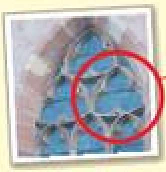
11 Vypočítajte veľkosti vyznačených uhlov na obrázku s dvoma dvojicami rovnobežiek.



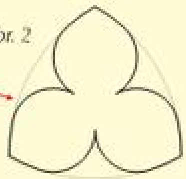
Gotické oblúky 1

Na gotických oknách možno často vidieť ornament trojlístka.

obr. 1

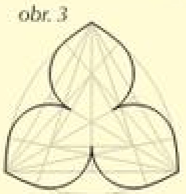


obr. 2



Aby sme trojlístok mohli narysovať, potrebujeme zostrojiť celú sieť pomocných čiar (obr. 3). Základom konštrukcie sú dva vhodne zvolené rovnostranné trojuholníky (budeme ich nazývať základné trojuholníky) a tri kružnicové oblúky (obr. 4). Stredmi kružnicových oblúkov sú vrcholy väčšieho základného trojuholníka.

obr. 3



obr. 4

Na obr. 5 je narysovaná polovica jedného lístka, ktorá sa skladá z oblúkov dvoch kružníc. Jedna z nich má stred vo vrchole veľkého základného trojuholníka (obr. 6), druhá vo vrchole malého základného trojuholníka (obr. 7). Na obrázkoch 5 - 7 pribudla k čiaram z obr. 4 ďalšia pomocná čiara. Tá určuje miesto, v ktorom sa oblúk jednej kružnice napája na oblúk druhej kružnice.

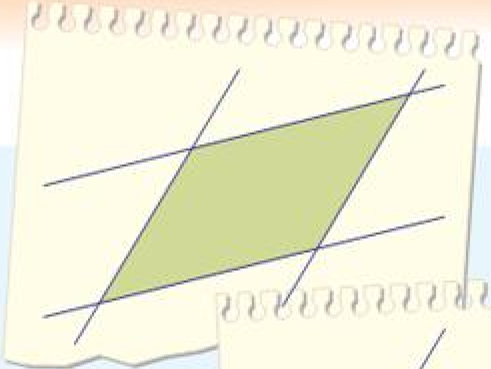
obr. 5

obr. 6

obr. 7

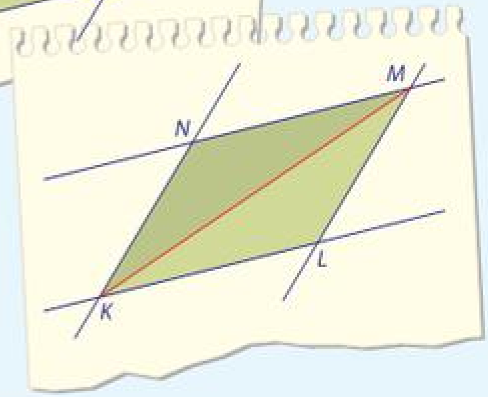
Úloha 1: Podľa predchádzajúceho opisu narysujte do vytlačeného obrázka 8 s predkreslenými čiarami gotický trojlístok. Obrázok 8 nájdete na www.orbispictus.sk v sekcii **Pre učiteľa**.

Rovnobežníky



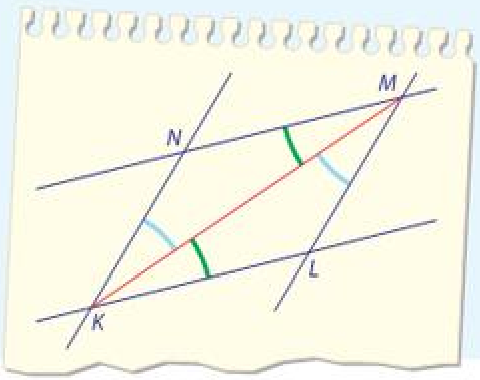
*Štvoruholníky, ktorých obe dvojice protiľahlých strán sú rovnobežné, voláme **rovnobežníky**.*

Uhlopriečka rovnobežníka rozdelí rovnobežník na dva trojuholníky:



Aj vám sa tieto trojuholníky zdajú rovnaké? Skúsme zistiť, ktorá strana alebo ktorý uhol jedného trojuholníka má rovnakú veľkosť ako strana alebo uhol druhého trojuholníka:

- *Predovšetkým majú spoločnú stranu KM.*
- *Keďže rovnobežník vznikol z dvoch dvojíc rovnobežiek, pohľadajme dvojice striedavých uhlov. Tie musia byť rovnaké.*

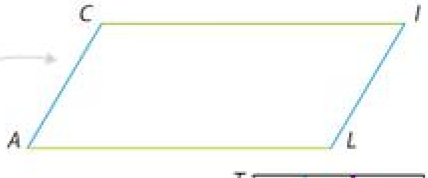


Práve sme zistili, že trojuholníky KLM a MNK majú rovnako dlhú jednu stranu KM a zhodujú sa aj vo veľkosti obidvoch k nej priľahlých uhlov. Preto sú na základe vety usu zhodné.

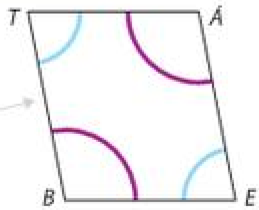
1 Narysujte tupouhlý nerovnoramenný trojuholník *JAR*. Dorysujte ho na rovnobežník a) *JARO*, b) *JAOR*, c) *JOAR*.

Kreslíme a rysujeme

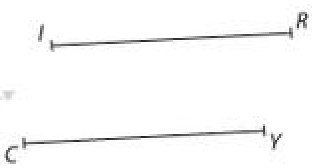
Alica sa snaží rysovať štvoruholníky, ktorých protiľahlé strany sú rovnako dlhé:



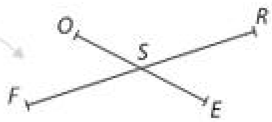
Beáta rysuje štvoruholníky, ktorých protiľahlé uhly sú rovnako veľké:



Cyril rysuje štvoruholníky, ktorých dve protiľahlé strany sú rovnako dlhé a rovnobežné:



Fero rysuje štvoruholníky, v ktorých priesečník uhlopriečok rozdelí uhlopriečky na rovnaké časti:



2 Narysujte do zošita 4 štvoruholníky ako Cyril a 4 štvoruholníky ako Fero.

3 Narysujte jeden Beátin štvoruholník, v ktorom jeden z uhlov má veľkosť a) 40°, b) 140°, c) 55°.

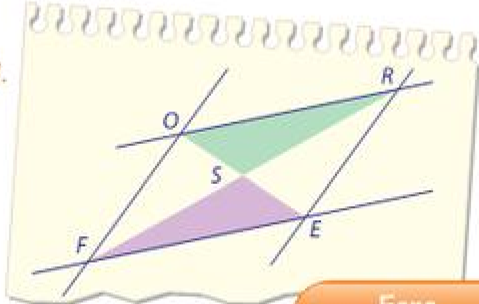
Pomohli ste si pri rysovaní Beátiných štvoruholníkov narysovaním rovnobežiek, alebo ste dopočítali veľkosť zvyšných uhlov?

Beáta:
Ak jeden z uhlov meria 40°, potom uhol vedľa neho meria $180° - 40° = 140°$.

Aj vám sa zdá, že Beáta, Cyril aj Fero rysujú len rovnobežníky?

4 Zistite meraním a rysovaním, či naozaj všetkých 11 štvoruholníkov, ktoré ste narysovali v úlohe 2 a úlohe 3, sú rovnobežníky. Ak máte iba rovnobežníky, skúste narysovať a) Cyrilov, b) Ferov, c) Beátin štvoruholník, ktorý nie je rovnobežník.

Pozrime sa na jeden Ferov štvoruholník. Zvýraznili sme v ňom trojuholníky FES a ROS.

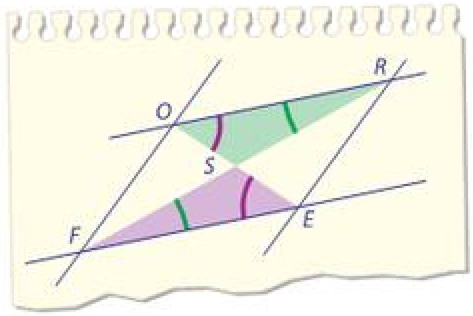


5 Nájdite v týchto dvoch trojuholníkoch zodpovedajúce si dvojice strán, ktorých dĺžky sú rovnaké, a dvojice uhlov, ktorých veľkosti musia byť rovnaké. Vysvetlite, prečo sú rovnaké.

Fero:
Rovnako dlhé musia byť strany *FS* a *SR*, lebo *S* je v strede uhlopriečok. Z podobného dôvodu majú rovnakú dĺžku aj strany *ES* a *SO*. Uhly *FSE* a *OSR* sú vrcholové, a preto majú tiež rovnakú veľkosť.

Trojuholníky FSE a RSO sa teda zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom. Na základe vety sus sú zhodné. Zhodujú sa preto aj v ďalších uhloch oproti rovnakým stranám. (Rovnaké uhly sme vyznačili rovnakou farbou.)

Tieto uhly sú striedavé pri priamkach FE a OR. Preto sú priamky FE a RO rovnobežné.



6 Podobným spôsobom ukážte, že aj priamky *FO* a *RE* sú rovnobežné. Ktoré trojuholníky si zvolíte na začiatku svojich úvah?

Pozrime sa teraz na jeden Alicin štvoruholník ALIC, v ktorom sme zvýraznili trojuholníky ALC a LIC.

7 Nájdite v týchto dvoch trojuholníkoch dvojice zodpovedajúcich si strán, ktorých dĺžky sú rovnaké, alebo uhlov, ktoré majú rovnaké veľkosti. Vysvetlite, prečo sú rovnaké.

8 Ukážte, že trojuholníky ALC a ICL sú zhodné. Na základe toho zdôvodnite, že priamky AL a IC sú rovnobežné.

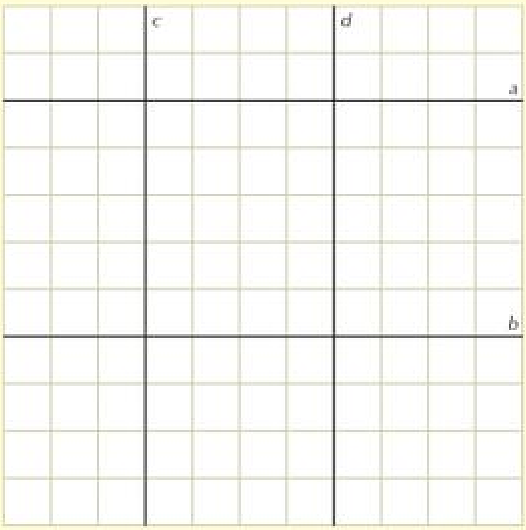
9 Nájdite štvoruholník, ktorý nie je rovnobežník a má dve zo strán rovnobežné a dve strany rovnako dlhé.

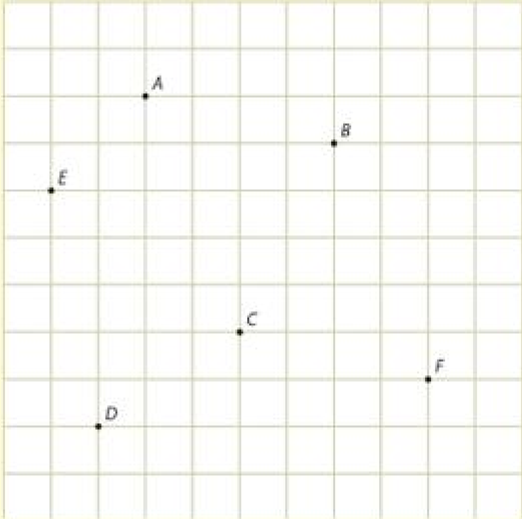
Bádame na štvorčekovej sieti 1

Na obrázku je štvorčeková mriežka, strana štvorčeka má dĺžku 1 cm. Niektoré priamky mriežky sú zvýraznené.

Úloha 1: a) Predstavte si, že váš priateľ má rovnakú mriežku ako vy, ale na nej je vyznačená iba priamka *b*. Chcete mu cez telefón opísať polohu priamky *a* pomocou polohy priamky *b*. Skúste to.
Podobne opíšte:
b) polohu priamky *b* pomocou polohy priamky *a*,
c) polohu priamky *d* pomocou polohy priamky *c*,
d) polohu priamky *a* pomocou polohy priamky *c*,
e) polohu priamky *b* pomocou polohy priamky *d*.

Úloha 2: Na obrázku je štvorčeková mriežka, strana štvorčeka meria 1 cm. Niektoré body mriežky sú zvýraznené. Váš priateľ má rovnakú mriežku, ale bez vyznačených bodov. a) Predstavte si, že máte priateľovi cez telefón opísať polohu bodu *A*. Opíšte ju.
b) Urobte postupne to isté pre body *B*, *C*, *D*.
c) Opíšte polohu bodu *E* pomocou polohy bodu *A*.
d) Opíšte polohu bodu *A* pomocou polohy bodu *E*.
e) Opíšte polohu bodu *F* pomocou polohy bodu *B* a naopak.





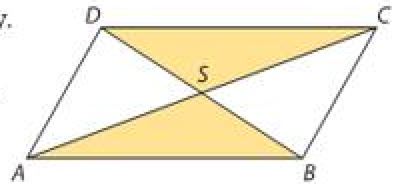
Z hrňme si, čo vyplýva z predchádzajúcich úloh a z vlastností striedavých, súhlasných a susedných uhlov.
V každom rovnobežníku platí:

- *obidve dvojice protiľahlých strán sú rovnobežné,*
- *obidve dvojice protiľahlých strán sú rovnako dlhé,*
- *obidve dvojice protiľahlých uhlov sú rovnako veľké,*
- *súčet každej dvojice vedľa seba ležiacich uhlov je 180°,*
- *uhlopriečky sa rozpoľujú.*

Zároveň platí, že ak má nejaký štvoruholník jednu z týchto vlastností, je to rovnobežník.

10 Narysujte ostrouhlý trojuholník *KYT* s rôzne veľkými uhlami. Doplňte ho na rovnobežník *KRYT* tak, že pri rysovaní využijete len to, že a) protiľahlé strany sú rovnobežné, b) protiľahlé strany sú rovnako dlhé, c) uhlopriečky sa rozpoľujú. Nezabudnite vždy na popis konštrukcie.

11 Uhlopriečky rozdelia rovnobežník na štyri trojuholníky. Všímajte si tie, ktoré sú na obrázku rovnako farebné. Nájdite v nich zodpovedajúce si dvojice rovnako dlhých strán a rovnako veľkých uhlov. Vypíšte tieto dvojice a napíšte vedľa nich, prečo sú rovnaké.



Rozdelenie rovnobežníkov

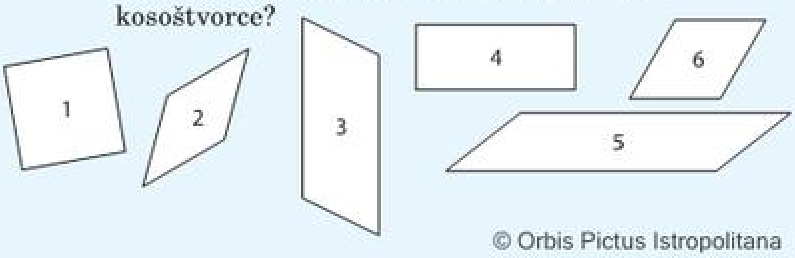
M ožno ste premýšľali nad tým, či napríklad štvorec patrí medzi rovnobežníky. V tejto časti sa pozrieme na rozdelenie rovnobežníkov.

Rovnobežníky delíme podľa veľkosti ich uhlov na:

- *pravouhlé štvoruholníky – obdĺžniky (špeciálny prípad obdĺžnika je podľa našej dohody aj štvorec). Uhly pravouhlých rovnobežníkov sú pravé.*
- *kosouhlé štvoruholníky – kosodĺžniky (špeciálny prípad kosodĺžnika je kosoštvorec). Uhly kosouhlých rovnobežníkov sú iné ako pravé.*

Kosoštvorec je teda taký rovnobežník, ktorý má uhly iné ako pravé a všetky strany má rovnako dlhé.
Graficky si rôzne typy štvoruholníkov môžeme predstaviť takto:

1 Ktoré rovnobežníky na obrázku sú štvorce, ktoré sú obdĺžniky, ktoré sú kosodĺžniky a ktoré kosoštvorce?



Rozdeľte sa v triede na 3 až 6 skupín. V každej skupine spoločne riešte jednu z nasledujúcich troch úloh. Potom referujte ostatným, na čo ste prišli.

2 Narysujte si niekoľko štvorcov, obdĺžnikov, kosoštvorcov a kosodĺžnikov aj s uhlopriečkami. Skúmajte trojuholníky, na ktoré ich tieto uhlopriečky rozdelia. Pokúste sa na konci výskumu charakterizovať jednotlivé typy rovnobežníkov pomocou vlastností týchto trojuholníkov.
Výsledky vášho výskumu by mali mať takúto podobu:
- Ak v rovnobežníku pre tieto trojuholníky platí ...., je to obdĺžnik.
- Ak v rovnobežníku pre tieto trojuholníky platí ...., je to kosoštvorec alebo štvorec.
- Ak v rovnobežníku pre tieto trojuholníky platí .... a ...., je to štvorec.

3 Narysujte si niekoľko štvorcov, obdĺžnikov, kosoštvorcov a kosodĺžnikov aj s uhlopriečkami. Skúmajte ich uhlopriečky. Pokúste sa na konci výskumu charakterizovať jednotlivé typy rovnobežníkov pomocou vlastností ich uhlopriečok.
Výsledky vášho výskumu by mali mať takúto podobu:
- Ak v rovnobežníku pre uhlopriečky platí ...., je to obdĺžnik.
- Ak v rovnobežníku pre uhlopriečky platí ...., je to kosoštvorec alebo štvorec.
- Ak v rovnobežníku pre uhlopriečky platí .... a ...., je to štvorec.

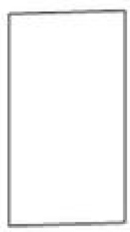
4 Vystrihnite si z papiera niekoľko štvorcov, obdĺžnikov, kosoštvorcov a kosodĺžnikov. Skúmajte, ktoré z nich sa dajú zohnúť a preložiť tak, aby sa obidve časti presne prekrývali. (Útvar, ktorý sa dá takto zohnúť a preložiť, voláme osovo súmerný. Priamka, na ktorej leží ohyb, je os súmernosti. Hovoríme tiež, že takýto útvar je súmerný podľa osi súmernosti). Tam, kde sa vám také prekrytie podarí, nájdite čo najviac možností preloženia.
Výsledky vášho výskumu by mali mať takúto podobu:
- Ak je rovnobežník osovo súmerný podľa ...., je to obdĺžnik.
- Ak je rovnobežník osovo súmerný podľa ...., je to kosoštvorec alebo štvorec.
- Ak je rovnobežník osovo súmerný podľa .... a ...., je to štvorec.

5 Vypíšte čo najviac vlastností obdĺžnika, ktorý nie je štvorec.

6 Vypíšte čo najviac vlastností kosoštvorca.

7 Vypíšte čo najviac vlastností štvorca.

8 Kamil chcel len pomocou merania dĺžok zistiť, či je na obrázku obdĺžnik. Odmeral dĺžky všetkých štyroch strán a vyšlo mu, že protiľahlé strany sú rovnako dlhé. Na základe toho usúdil, že na obrázku je obdĺžnik. Uvažoval správne?



Úvaha z riešenia predchádzajúcej úlohy sa niekedy využíva aj pri stavebných prácach. Ak chcete zo štyroch dosiek, z ktorých sú dve a dve dosky rovnako dlhé, poskladať obdĺžnikový tvar, nestačí, keď jedným klincom zbijete dosky k sebe ako na obrázku.

Musíte si pomôcť meraním a nastaviť uhlopriečky tak, aby boli rovnako dlhé a potom pomocou ďalších klincov dosky upevniť.

9 Koľko a) pravých, b) 45-stupňových, c) 177-stupňových uhlov môže mať rovnobežník?

10 Daná je uhlopriečka AC rovnobežníka $ABCD$. Dorysujte rovnobežník $ABCD$, ak viete, že:
a) je to štvorec,
b) je to kosoštvorec s dĺžkou strany 6 cm,
c) je to kosoštvorec, ktorého druhá uhlopriečka meria 6 cm,
d) je to obdĺžnik, ktorého uhlopriečky zvierajú uhol 44°,
e) je to obdĺžnik, ktorého jedna strana meria 6 cm.

11 Narysujte kružnicu, ktorá prechádza všetkými vrcholmi a) kosoštvorca, b) kosodĺžnika.

12 Narysujte kružnicu, ktorej sa dotýkajú všetky priamky, na ktorých ležia strany a) kosodĺžnika, b) kosoštvorca.

Nadváha a obezita 2

Pripomeňte si rubriku *Nadváha a obezita 1*, ktorá je na strane 11. Na základe tabuliek v tejto rubrike riešte nasledujúce úlohy.

Úloha 1: Koľko percent všetkých účastníkov výskumu bolo obéznych? Výsledok zaokrúhlite na stotiny percenta.

Úloha 2: Vyplýva z tohto prieskumu, že na Slovensku v roku 2001 nadváha postihovala viac deväťročné dievčatá ako deväťročných chlapcov? Svoju odpoveď vysvetlite.

Úloha 3: Všimnite si posledný stĺpec tabuľky 1 a v ňom číslo 6,45. Podľa textu v hornom riadku tabuľky je toto číslo počet percent.
a) Zistite, počet percent ktorej veličiny to je.
b) Overte, či je tento počet percent vypočítaný správne.

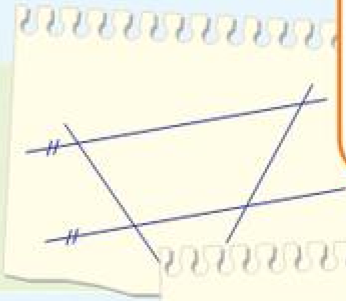
Lichobežník

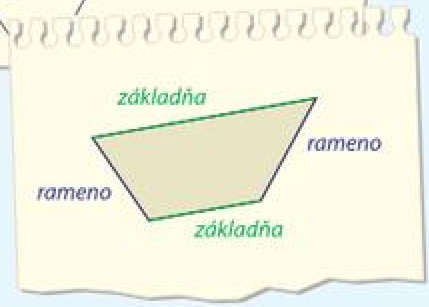
Nie všetky štvoruholníky majú rovnobežné obidve dvojice protiľahlých strán.

1 Narysujte štvoruholník, v ktorom je rovnobežná iba jedna dvojica protiľahlých strán.

Rysovali ste ako Marcel?

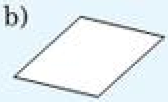
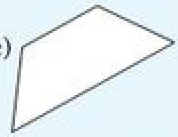
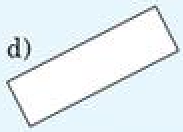
Marcel:
Najskôr som narysoval dvojicu rovnobežiek. Potom som narysoval dve priečky týchto rovnobežiek tak, aby tieto priečky neboli rovnobežné.





Útvar, ktorý máte vy aj Marcel narysovaný v zošite, sa volá ***lichobežník****.*
Lichobežník je štvoruholník, ktorý má iba dve strany navzájom rovnobežné. Tieto strany sa volajú ***základne****. Strany, ktoré nie sú rovnobežné, sa volajú* ***ramená*** *lichobežníka.*

2 Na ktorých obrázkoch je lichobežník?

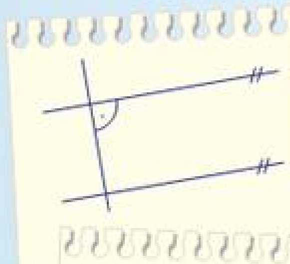
a)  b)  c)  d) 

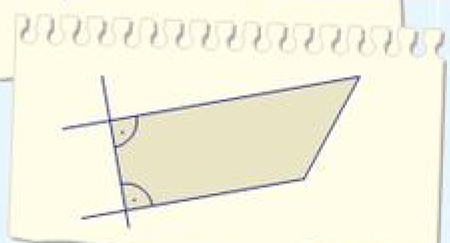
3 Koľko a) pravých, b) 45-stupňových, c) 177-stupňových uhlov môže mať lichobežník?

4 Peter tvrdí, že v lichobežníku nemôže byť iba jeden pravý uhol. Má pravdu?

Pozrite sa, ako Peter zdôvodňuje svoje tvrdenie.

Peter:
Keď sú základne lichobežníka rovnobežné a jeden uhol pri základni je pravý, znamená to, že táto základňa a rameno sú kolmé. Potom je však toto rameno kolmé aj na druhú základňu.
Takže ak je v lichobežníku jeden pravý uhol, musí tam byť aj druhý pravý uhol.



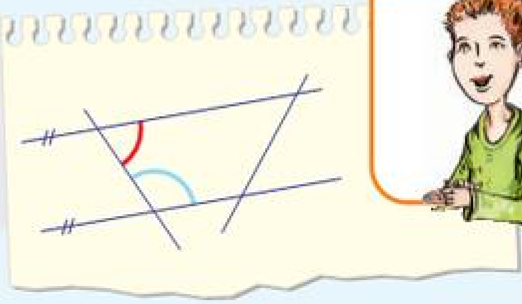


Lichobežník, ktorý má dva pravé uhly, voláme ***pravouhlý lichobežník****.*

5 Narysujte do zošita tri lichobežníky. Odmerajte v každom obidva uhly pri jednom aj pri druhom ramene. Čo pozorujete?

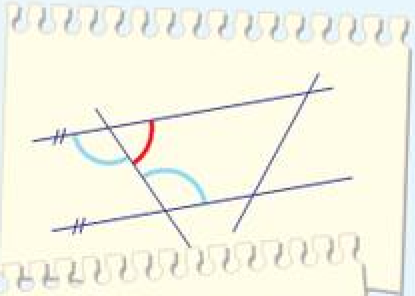
Vyšlo vám to isté, čo Martine?

Martina:
Mne to vychádza tak, že dva uhly pri ramene v lichobežníku vždy merajú spolu 180°. No neviem, prečo je to tak.

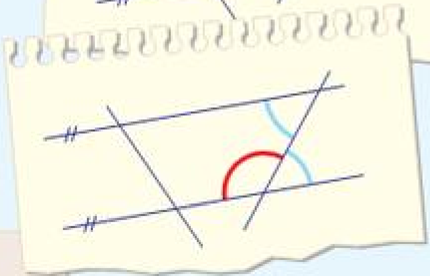


6 Pomôžte Martine vysvetliť, prečo je súčet dvoch uhlov pri každom ramene 180°.

Aj vy ste pri zdôvodnení Martininho tvrdenia využili vlastnosti susedných a striedavých uhlov? Na obrázku, na ktorom vidíte lichobežník, sú modrou farbou vyznačené dva striedavé uhly. Zároveň platí, že červený uhol a modrý uhol sú susedné uhly, preto spolu merajú 180°.



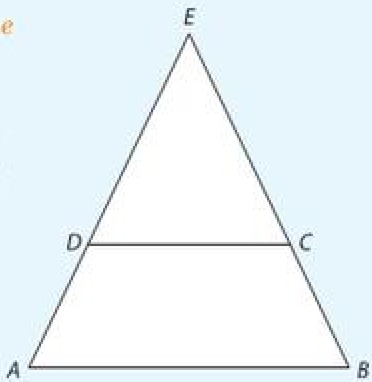
7 Zdôvodnite podobným spôsobom, že aj súčet uhlov pri druhom ramene daného lichobežníka je 180°.



> **!** Súčet dvoch uhlov pri ramene lichobežníka je 180°.

Lichobežník, ktorého ramená majú rovnakú dĺžku, voláme ***rovnoramenný lichobežník****.*

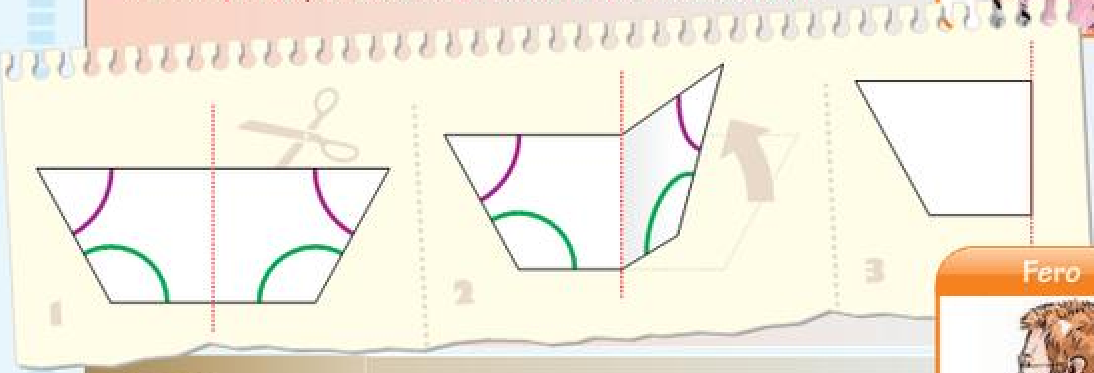
8 Na obrázku je rovnoramenný trojuholník ABE rozdelený rovnobežkou DC so základňou AB trojuholníka na menší trojuholník a lichobežník.
a) Skúste ukázať pomocou uhlov, že aj trojuholník DCE je rovnoramenný.
b) Ukážte, že štvoruholník $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník.



9 Zdôvodnite, že v rovnoramennom lichobežníku na obrázku majú uhly vyznačené rovnakou farbou rovnakú veľkosť.

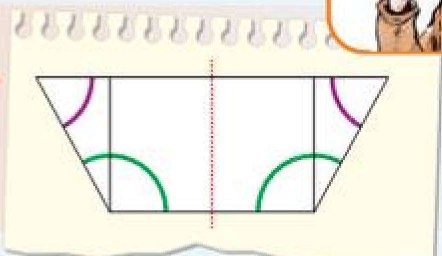
Pozrite, ako si so zdôvodnením poradila Lívia.

Lívia:
Ja som si predstavila, že lichobežník je vystrihnutý z papiera. Keďže je rovnoramenný, tak keď ho preložím podľa spojnice stredov základní, ramená aj uhly splynú. Takže vyznačené uhly sú rovnako veľké.



Fero:
Lívia, ako vieš, že sa ti to po zohnutí prekryje?

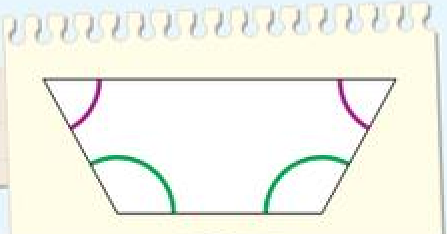
Lívia:
Mne pomohol tento obrázok:
V ňom platí, že dva pravouhlé trojuholníky, ktoré vznikli po dokreslení dvoch úsečiek, sú zhodné.



10 Viete ukázať, že pravouhlé trojuholníky na obrázku sú skutočne zhodné?

Na základe riešenia predchádzajúcich úloh platí:

! V rovnoramennom lichobežníku sú uhly pri každej základni rovnako veľké.



11 Na obrázku je časť lichobežníka *ABCD*. Dorysujte ho, ak viete, že druhá základňa má dĺžku 4 cm.

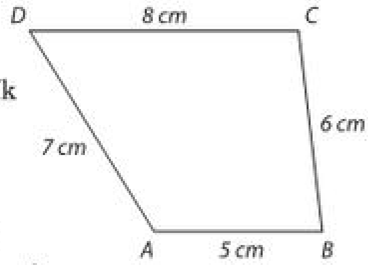
Pomohli ste si pri riešení predchádzajúcej úlohy rovnobežnosťou?

12 Nájdite iné riešenie úlohy 11.

13 Odpovedzte na otázky:
a) Existuje lichobežník, ktorý má dva protiľahlé uhly tupé?
b) Existuje lichobežník, ktorý má dva a dva protiľahlé uhly rovnaké?

14 Každý lichobežník sa dá dvoma spôsobmi rozdeliť na trojuholník a rovnobežník. Narysujte si dva rovnaké lichobežníky a každý iným spôsobom rozdeľte na trojuholník a rovnobežník.

15 Na obrázku je lichobežník $ABCD$ aj s vyznačenými dĺžkami strán. Rozdeľte tento lichobežník na trojuholník a rovnobežník oboma spôsobmi (každý spôsob na samostatnom obrázku) a určte rozmery vzniknutých trojuholníkov a rovnobežníkov.



16 Narysujte lichobežník z predchádzajúcej úlohy tak, že najprv narysujete jeden z trojuholníkov a potom využijete rovnobežnosť.

17 a) Narysujte lichobežník so základňami dlhými 4 cm a 7 cm a s ramenami dlhými 3 cm a 5 cm. b) Narysujte lichobežník s ramenami dlhými 4 cm a 7 cm a so základňami dlhými 3 cm a 5 cm.

18 Vráťte sa k prvému lichobežníku v úlohe 17. Odoberte z neho čo najmenší trojuholník tak, aby ste dostali pravouhlý lichobežník.

Tangram a iné skladačky

V ďalších úlohách budete rysovať, strihať a skladať. Odporúčame, aby ste rysovali na tvrdý papier. Pri skladaní sa útvary nesmú prekrývať. Môžete pracovať v skupinách.

1 Narysujte rovnoramenný trojuholník. Vystrihnite ho a rozstrihnite na dva rovnaké trojuholníky. Z týchto trojuholníkov zložte štvoruholník. Nájdite čo najviac riešení. Aké typy štvoruholníkov ste dostali?

2 Narysujte dva rovnaké lichobežníky a po vystrihnutí z nich zložte rovnobežník. Koľko rôznych riešení nájdete? Ako sa zmení počet riešení, ak pôvodný lichobežník bude rovnoramenný?

3 Dokážte, že v riešení predchádzajúcej úlohy ide skutočne o rovnobežníky.

4 Narysujte a vystrihnite kosodĺžnik. Najprv ho rozdeľte na dva pravouhlé lichobežníky a potom z týchto lichobežníkov zložte obdĺžnik.

Počuli ste už o tangrame?

5 Nájdite na internete článok, v ktorom je vysvetlené, čo je tangram.

Prečítajte si článok, ktorý sme našli na internete.

Tangram je veľmi starý hlavolam pôvodom z Číny. Vytvorený je z väčšieho štvorca jeho rozdelením na sedem častí. Prvé použitie tangramu nie je historicky zachytené. Rôzne zdroje uvádzajú niekoľko príbehov, ktoré sa snažia vysvetliť jeho vznik a názov.

Jeden z historických prameňov uvádza, že asi pred 4-tisíc rokmi žil vynikajúci remeselník, ktorý sa volal Tan. Ten ako poctu najvyššiemu cisárovi navrhol a vyrobil nádhernú dlaždicu. Celá dedina šla spolu s Tanom odovzdať dar cisárovi, ale v chodbách paláca sa Tan potkol, spadol a svoj dar rozbil na 7 kúskov. Tan sa pokúšal rýchlo zložiť tieto diely späť do dlaždice, ale stále mu vznikali nové a nové obrázky. Cisár bol vyrušený hlukom na chodbách a poslal sluhu, aby zistil, čo sa stalo. Keď sa sluha vrátil, odovzdal cisárovi skladačku zo siedmich dielov ako dar na jeho potešenie a zábavu.

My si vystačíme s tangramom vyrobeným z tvrdého papiera.

6 Opíšte, na aké útvary je rozdelený základný štvorec.

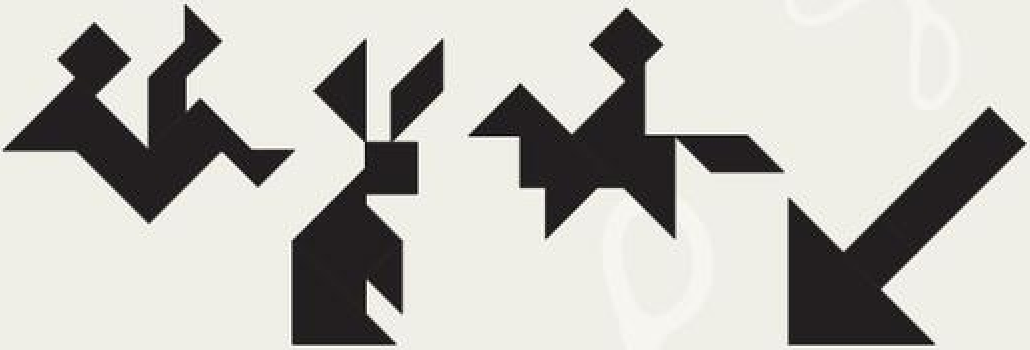
7 Na tvrdý papier narysujte štvorec so stranou 10 cm a rozdeľte ho na 7 dielov ako tangram. Jednotlivé diely tangramu vystrihnite.

Teraz už máte všetko pripravené, aby ste sa pokúsili zložiť niektoré útvary. Vždy musíte použiť všetky dieliky a nijaké diely sa nesmú prekrývať.

8 Zložte zo siedmich dielov tangramu pôvodný štvorec.

9 Zložte zo všetkých dielov tangramu a) obdĺžnik, b) kosodĺžnik, c) rovnoramenný lichobežník, d) pravouhlý trojuholník.

10 Zložte zo všetkých dielov tangramu niektoré z útvarov na obrázku.
Pozor, nie je to ľahké.



11 Ak sa vám tangram páči, nájdite na internete ďalšie obrázky, ktoré možno zložiť z jednotlivých dielov tangramu. Niektoré námety nájdete aj na ďalších stranách učebnice.

V živote sa často stretnete so slovnými spojeniami „má malú šancu“, „jeho šance boli mizivé“, „jej šance sa zvýšili“. Pozrime sa spolu na to, čo slovo šanca znamená. Začneme zopakovaním niektorých situácií, s ktorými ste sa už na hodinách matematiky alebo v bežnom živote stretli.

Tombola

Slovo tombola asi poznáte.

1 Viete vysvetliť, čo je tombola?

Na rôznych akciách, ako sú napr. plesy, stužkové či oslavy, si ich účastníci môžu kúpiť lístky – lósy – za vopred stanovenú cenu, pričom sa z nich neskôr losujú víťazi jednotlivých cien. Celý tento proces sa volá tombola.
V slovníku nájdete o. i. tento opis:
Tombola – zábavná lotéria s vecnými výhrami.

2 Peter si kúpil v tombole 2 lístky, Viera si v tej istej tombole kúpila 6 lístkov.
a) Kto z nich mal väčšiu šancu vyhrať 1. cenu? Koľkokrát väčšiu šancu mal?
b) Kto z nich mal väčšiu šancu vyhrať 2. cenu? Koľkokrát väčšiu šancu mal?
c) Kto z nich mal väčšiu šancu vyhrať 13. cenu? Koľkokrát väčšiu šancu mal?

> **!** Ak je tombola spravodlivá, všetky zakúpené lístky majú rovnakú šancu vyhrať ktorúkoľvek z cien.

To znamená, že na všetky tri otázky z úlohy 2 bude rovnaká odpoveď: Kto má viac lístkov, má väčšiu šancu vyhrať. To je Viera.

Viera:
Mám **3-krát viac** lístkov ako Peter, čiže mám **3-krát väčšiu šancu** ako on vyhrať ktorúkoľvek cenu.

Peter:
Za 3-krát väčšiu šancu však zaplatí 3-krát viac peňazí pri kúpe lístkov do tomboly.

To, koľko cien je v tombole, závisí od organizátorov aj od typu podujatia. Pri niektorých udalostiach chcú mať organizátori z organizovania tomboly zisk, inokedy sa takmer všetky peniaze za predaj lístkov investujú na výhry alebo napr. na dobročinné účely.

3 Organizátori tomboly kúpili ceny spolu za 200 €. Vedia, že organizácia tomboly (tlač 250 lístkov a ich predaj) ich bude stáť ďalších asi 30 €. a) Za akú minimálnu cenu musia predávať lístky, ak chcú mať z tomboly zisk približne 100 €? b) Za akú minimálnu cenu musia predávať lístky, ak chcú mať z tomboly zisk približne 100 €, pričom odhadujú, že sa predá asi len 160 lístkov? c) Nakoniec sa rozhodli predávať lístky po 2 €. Koľko najmenej lístkov musia predať, aby mali plánovaný zisk 100 €?

4 Dušanova mama sa v jednom mesiaci zapojila do dvoch tombol. V prvej tombole si kúpila jeden z 250 lístkov. V druhej tombole si kúpila jeden z 1 000 lístkov tomboly. V ktorej z nich mala väčšiu šancu vyhrať hlavnú cenu? Koľkokrát väčšiu šancu mala?

> **!** Ak si kúpime v tombole jeden lístok, platí:
> Čím menej lístkov je celkovo v tombole, tým väčšiu šancu vyhrať máme.

To bola v našom prípade prvá tombola. V tej bolo až 4-krát menej lístkov. Preto šanca vyhrať prvú cenu v nej bola 4-krát väčšia.

5 Koľko lístkov by Dušanova mama musela kúpiť v druhej tombole, aby jej šanca vyhrať v tejto tombole hlavnú cenu bola a) rovnaká, b) väčšia ako šanca vyhrať hlavnú cenu v prvej tombole?

Vyšlo vám to rovnako ako Viere a Petrovi?

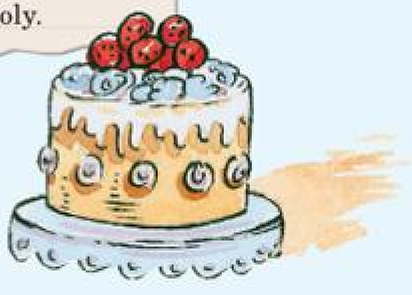
Viera:
Aby sa šanca Dušanovej mamy zväčšila, musela by kúpiť viac lístkov. Šancu potrebuje zväčšiť 4-krát, preto by musela kúpiť 4-krát viac lístkov, čiže $4 \cdot 1 = 4$ lístky.

Peter:
Ak by chcela mať v 2. tombole väčšiu šancu vyhrať než v 1. tombole, musela by kúpiť aspoň o jeden lístok viac, ako vyšlo Viere. Musela by kúpiť aspoň 5 lístkov.

6 Koľko lístkov by sme museli kúpiť v tombolách v úlohe 4, aby sme mali istotu, že získame a) 1. cenu, b) 2. cenu, c) 11. cenu?

> **!** Keby sme chceli mať istotu výhry ktorejkoľvek ceny, museli by sme kúpiť všetky lístky do tomboly.

7 Peter mal 6 lístkov do tomboly na plese učiteľov a Viera mala 3 lístky do tomboly na plese požiarnikov. Pritom Viera mala a) rovnakú, b) väčšiu šancu vyhrať prvú cenu ako Peter. Je to možné? Uveďte jednu konkrétnu situáciu.



Našli ste rovnaké riešenie ako Dušan?

Dušan:
Viera si kúpila 2-krát menej lístkov, teda pri rovnakom počte lístkov v tombolách by mala 2-krát menšiu šancu. Aby sa šance vyrovnali, musí byť v jej tombole 2-krát menej lístkov ako v Petrovej. Napríklad v Petrovej tombole bude 400 lístkov a vo Vierinej 200 lístkov.

Dušan:
Ak má mať Viera väčšiu šancu vyhrať ako Peter, tak v jej tombole musí byť ešte menej ako 2-krát menej lístkov. Napríklad v Petrovej tombole mohlo byť 400 lístkov a vo Vierinej 160 lístkov.

8 Vráťme sa k predchádzajúcej úlohe, kde Peter má 6 lístkov do tomboly na ples učiteľov a Viera má 3 lístky do tomboly na ples požiarnikov. V Petrovej tombole je 400 lístkov a vo Vierinej 160 lístkov. Koľkokrát väčšiu šancu na výhru hlavnej ceny má Viera ako Peter?

9 V tombole je 500 lístkov. Jano si kúpil 5 lístkov. Koľkokrát je jeho šanca, že vyhrá prvú cenu, menšia ako istota?

10 V jednoduchej číselnej lotérii sa losuje jedno číslo z 50. Každý tipujúci na tikete vyznačí jedno číslo, ktoré si myslí, že vylosujú. Za tento tip zaplatí 0,50 €. a) Koľko čísel by sme museli tipovať, aby sme mali istotu, že uhádneme vylosované číslo? b) Koľko by sme zaplatili za tieto tipy?

11 Kto má menšiu šancu vyhrať: Jano, ktorý v tejto lotérii stavil 3 čísla, alebo Soňa, ktorá stavila 6 čísel? Koľkokrát menšiu šancu má?

12 V inej lotérii sa tipuje jedno číslo zo 100. Jano sa na tejto lotérii zúčastnil a tipoval 7 čísel. Soňa ostala pri lotérii, kde sa losuje 1 číslo z 50 a vybrala si 3 čísla. Kto má väčšiu šancu uhádnuť vylosované číslo?

13 V tombole je 200 lístkov. Peter si chce kúpiť 1 lístok. Koľkokrát väčšiu šancu vyhrať hlavnú cenu by mala Jana, keby si do tejto tomboly kúpila a) 2 lístky, b) 3 lístky, c) 12 lístkov, d) 88 lístkov, e) 200 lístkov?

Pravdepodobnosť

V predchádzajúcej kapitole sme porovnávali šance v rozličných tombolách. Videli ste, že niekedy to bolo jednoduché, ale inokedy bolo treba veľa premýšľať a počítať. Aby sme mali situáciu čo najviac zjednodušenú, matematici v minulosti postupne dohodli terminológiu, spôsob výpočtu šancí rozličných udalostí a javov aj ich zápis. Spolu so slovom šanca sa používa slovo pravdepodobnosť. Pravdepodobnosti budeme priraďovať číselnú hodnotu. Začneme tým, že „istote" priradíme hodnotu 1. A ešte dodáme, že „nemožnému" priradíme hodnotu 0. Takže pravdepodobnosť každého javu bude číslo od 0 do 1.

! Istý jav, istá udalosť, má pravdepodobnosť 1.

! Nemožný jav, nemožná udalosť, má pravdepodobnosť 0.

! Pravdepodobnosť vyjadruje hodnota od 0 do 1.

1 Spomeňte si, kedy ste sa stretli so slovami alebo slovnými spojeniami šanca, pravdepodobnosť, istota, bez šance.

2 Kedy mám v tombole pravdepodobnosť výhry prvej ceny a) 1, b) 0?

3 V tombole je 200 lístkov a 15 cien. Koľko najmenej lístkov si musím kúpiť, aby som mal istotu, že vyhrám aspoň jednu cenu?

4 Diskutujte o tom, či je:
a) nulová pravdepodobnosť, že ma trafí blesk, ak sedím v reštaurácii,
b) istota, že sa naučím 10 nových anglických slovíčok, ak sa ich učím pol hodiny,
c) nemožné, aby basketbalista trafil do koša 5-krát za sebou cez celé ihrisko,
d) pravdepodobné, že sa v budúcnosti bude cestovať v čase do minulosti alebo budúcnosti.

Na internete sme našli úryvky z týchto článkov:

Pravdepodobnosť, že udrie blesk do človeka, je jedna k trom miliónom. Pri telefonovaní z mobilu v prípade zásahu bleskom je vysoká šanca, že budete vážne zranení.

Pri francúzskej rulete je hracie koleso rozdelené na 37 dielov očíslovaných číslami 0 až 36. Tridsiate siedme políčko s číslom 0 pridali do rulety práve Francúzi už v roku 1842, aby vychýlili pravdepodobnosť výhry v prospech organizátora a v neprospech hráča.

Pravdepodobnosť, že pri teste s 20 úlohami, pričom pri každej máte na výber štyri možnosti, si správne tipnete 19 alebo 20 odpovedí správne, je extrémne malá.

5 Nájdite podobné články v novinách. Ktoré udalosti z tých, čo ste našli, sú isté?

Vráťme sa teraz k úlohe 13 z predchádzajúcej kapitoly.

Aj vám vyšlo, že ak si kúpime 200 lístkov v tejto tombole, máme 200-krát väčšiu pravdepodobnosť vyhrať, ako keď si kúpime 1 lístok? Dvesto lístkov predstavuje v tejto tombole všetky lístky, teda kúpiť si 200 lístkov znamená istotu výhry. Istote priraďujeme hodnotu 1. Ak si kúpime 1 lístok, tak pravdepodobnosť, že vyhráme hlavnú cenu, je 200-krát menšia ako istota. Preto pravdepodobnosť, že s 1 lístkom vyhráme hlavnú cenu, bude 200-krát menej ako 1, teda
1 : 200 = 0,005.

! V matematike sa pravdepodobnosti vyjadrujú väčšinou číslom, v bežnom živote zasa percentom. Takýmto vyjadreniam sa budeme venovať neskôr.

6 Vypočítajte pravdepodobnosť výhry prvej ceny v tombole z úlohy 13, ak sme si kúpili a) 2 lístky, b) 3 lístky, c) 5 lístkov, d) 12 lístkov, e) 44 lístkov.

7 Ako sa zmenia pravdepodobnosti v predchádzajúcej úlohe, ak miesto 200 lístkov bude v tombole celkovo a) 500, b) 160, c) 300 lístkov?

8 V tombole je 256 lístkov. Akú pravdepodobnosť vyhrať prvú cenu má Peter, ak si kúpil 7 lístkov?

Poradili ste si s touto úlohou rovnako ako Peter?

Peter:
Kolkokrát viac lístkov, tolkokrát väčšia pravdepodobnosť.
Je to priama úmera, pomôžem si trojčlenkou:
256 lístkov (istota výhry) .... pravdepodobnosť je 1
7 lístkov .... pravdepodobnosť je ?

$7 : 256 = ? : 1$, takže $1 \cdot 7 : 256 = ?$, čiže $? = \frac{7}{256} = 0{,}027\,343...$

9 V jednej tombole, v ktorej je spolu dvesto lístkov, som si kúpil tri lístky. V inej, v ktorej bolo presne 680 lístkov, som si kúpil 10 lístkov. V ktorej tombole mám väčšiu šancu vyhrať prvú cenu?

Porovnajte svoje riešenie s Filipovým.

Filip:
Budem počítať pravdepodobnosti výhry prvej ceny pre jednotlivé tomboly a tie porovnám. Pomôžem si trojčlenkou:
1. tombola
200 lístkov .... pravdepodobnosť 1
3 lístky .... pravdepodobnosť ?
$3 : 200 = ? : 1$, takže $1 \cdot 3 : 200 = ?$, čiže $? = 0{,}015$

2. tombola

680 lístkov .... pravdepodobnosť 1

10 lístkov .... pravdepodobnosť ?

10 : 680 = ? : 1, takže 1 · 10 : 680 = ?, čiže ? = 0,014 705.....

Vidím, že v 2. tombole je pravdepodobnosť o trochu menšia.

10 V zelenej tombole je 50 lístkov s číslami na vylosovanie hlavnej ceny. Tri z nich má Zita. V modrej tombole je 80 lístkov. Päť z nich má Milan.

a) Aká je pravdepodobnosť, že Zita vyhrá hlavnú cenu v zelenej tombole?

b) Aká je pravdepodobnosť, že Milan vyhrá hlavnú cenu v modrej tombole?

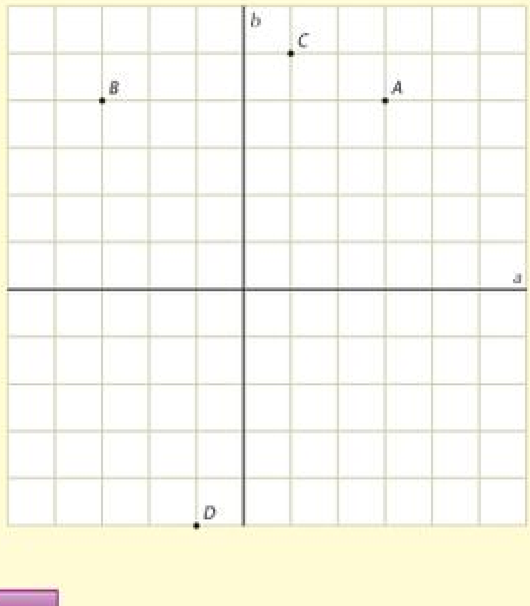
c) Kto má väčšiu šancu vyhrať hlavnú cenu? Zita alebo Milan?

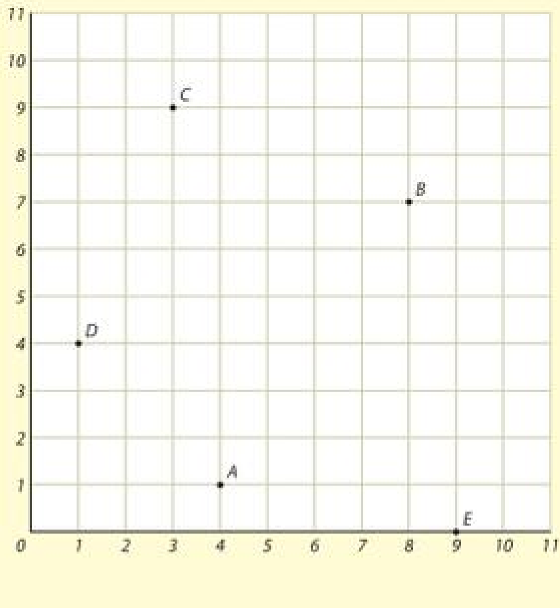
Bádame na štvorčekovej sieti 2

Na obrázku je štvorčeková mriežka so zvýraznenými priamkami *a*, *b*. Strana štvorčeka meria 1 cm. Niektoré body mriežky sú zvýraznené.

Úloha 1: a) Nájdite body mriežky, ktoré sú od priamky *a* vzdialené 5 cm a súčasne sú od priamky *b* vzdialené 2 cm. Koľko ich je?
b) Nájdite body mriežky, ktoré sú od priamky *a* vzdialené 2 cm a súčasne sú od priamky *b* vzdialené 5 cm. Koľko ich je?
c) Podobne pomocou vzdialeností od priamok *a*, *b* opíšte polohu bodov *A*, *B*, *C*, *D*. Je váš opis jednoznačný (spĺňa podmienky vášho opisu polohy bodu *A* iba bod *A*, alebo tieto podmienky spĺňajú aj nejaké ďalšie body)?

Úloha 2: Na obrázku je štvorčeková mriežka, strana štvorčeka meria 1 cm. Niektoré body mriežky sú zvýraznené. Váš priateľ má rovnakú mriežku, na nej však nie sú vyznačené body *A* až *E*.
a) Predstavte si, že mu máte cez telefón čo najstručnejšie opísať polohu bodu *A*. Skúste to.
b) Urobte postupne to isté pre body *B*, *C*, *D*, *E*.





11 Riešte predchádzajúcu úlohu, ak Zitá má a) 7, b) 16 lístkov a Milan má a) 11, b) 26 lístkov.

12 Koľko lístkov by musela mať kúpených Zita, keby chcela, aby jej šanca vyhrať bola aspoň a) 0,5; b) 0,1; c) 0,25?

Hádžeme hracou kockou

V predchádzajúcich ročníkoch ste sa už stretli s úlohami, v ktorých sa hádzalo hracími kockami. V tejto kapitole sa na niektoré úlohy pozrieme podrobnejšie. Pôjde nám však predovšetkým o experimentovanie. Zložitejším výpočtom sa budete viac venovať na strednej škole.
Určite ste už hrali hru Človeče, nehnevaj sa. Hádže sa pri nej hracími kockami, pričom najdôležitejšie číslo, ktoré najviac ovplyvňuje priebeh hry, je číslo 6. Možno ste pri hre mali pocit, že šestka nepadá a nepadá. A že ostatné čísla padajú častejšie. Poďme sa spolu pozrieť, ako je to s padaním jednotlivých čísel na kocke. Každému číslu zodpovedá príslušný počet bodiek na jednotlivých stenách.

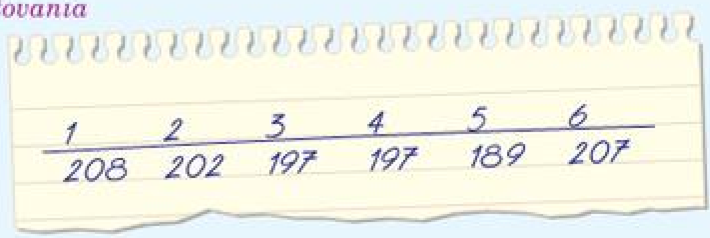
Ktoré číslo padá najčastejšie?

Experiment 1 Vezmite si hraciu kocku a každý ňou hoďte 50-krát. Vždy si zaznačte, ktoré číslo pri každom hode padlo. Akým spôsobom budete zapisovať výsledky?

1 Čo ste pozorovali pri predchádzajúcom experimente? Aký počet bodiek padal najčastejšie? Prečo je to tak? Myslíte si, že keby ste zopakovali rovnaký počet hodov, dopadlo by to rovnako? Padlo by číslo 1 rovnaký počet krát ako pri prvých 50 hádzaniach? Vysvetlite svoju odpoveď.

2 Ak je vás v triede aspoň 20, znamená to, že spolu hodíte najmenej tisíckrát. Koľkokrát **v celej triede** padlo číslo 1? Koľkokrát číslo 2, 3, 4, 5 a koľkokrát číslo 6? Akým spôsobom ste zapisovali výsledky? Robili ste to všetci rovnako?

Pozrite si zápis z experimentovania v jednej ôsmej triede.



Všimnite si, ako výsledok tohto pokusu vyhodnotili Milan a Gabriela.

Milan:
Najčastejšie bude vždy padať číslo 1 a najmenej často číslo 5.

Gabriela:
Všetkých 6 čísel asi padá s rovnakou šancou.

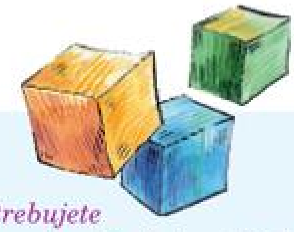
3 Ktoré vyhodnotenie sa vám zdá lepšie? Svoju odpoveď skúste zdôvodniť.

Aj vy si myslíte, že Milan nemá pravdu? Možno stačí pokus zopakovať, a číslo 1 už nebude padať najčastejšie.

4 Na základe údajov v tabuľke určte, koľko žiakov je v triede. Aký priemerný počet bodiek im padal?

5 Aké priemerné číslo padalo vám? Určte priemer za každého samostatne aj v rámci celej triedy. Vyšiel každému rovnaký priemer? Vyšiel niekomu priemer väčší ako 7?

Na koľký pokus padá číslo 6 na kocke najčastejšie?



Rozdeľte sa na skupiny, môžu to byť aj dvojice.
Pozrieme sa spoločne na inú otázku. Predstavte si, že potrebujete v hre hodiť šestku. Môžete hádzať dovtedy, kým šestka nepadne. Budete počítať, na koľký pokus vám šestka padla. Keď sa to stane, zapíšte si číslo, udávajúce, na koľký pokus padla, a začnite od začiatku. Opäť budete hádzať dovtedy, kým nepadne šestka.
Zasa počítajte, na koľký pokus šestka padla. Keď padne, zapíšte si, na koľký pokus to bolo. No ešte predtým si zatipujte.

1 Tipujte (každý sám za seba), na koľký hod padá číslo 6 najčastejšie.

2 a) Najmenej na koľký pokus môže šestka padnúť?
b) Najviac na koľký pokus môže šestka padnúť?

Experiment 2 Urobte ako skupina 50 pokusov. Rozdeľte si prácu rozumne. Uvedomte si, že budete musieť hodiť kockou viac ako 50-krát. Zapisujte si, na koľký pokus padla šestka a potom začnite počítať od začiatku. Zistite, ktoré číslo máte v zošite napísané najčastejšie. (Michalova skupina mala po desiatich pokusoch v zošite napísané, že šestka padla na: 4., 5., 1., 3., 5., 12., 2., 7., 4., 4. hod. U nich zatiaľ šestka padala najčastejšie na štvrtý raz.)

3 Vyhodnoťte všetky pokusy spoločne za celú triedu. Na koľký pokus podľa tohto experimentu padala šestka najčastejšie v rámci celej triedy? Je na výsledku, ktorý ste dostali, niečo prekvapujúce? Bol by váš výsledok rovnaký, keby ste pokusy robili znovu?

Keď hádžete kockou, môže sa vám pritrafiť všeličo: môžete napríklad trikrát za sebou hodiť rovnaké číslo, môže sa vám stať, že napríklad číslo 3 nepadne veľmi dlho, dokonca vám môže padnúť napríklad číslo 4 aj 10-krát za sebou... Treba rozlišovať medzi týmito konkrétnymi situáciami a tým, ako by sa kocka správala pri veľmi veľkom počte pokusov.

Výrobcovia hracích kociek sa, samozrejme, snažia vyrábať hracie kocky tak, aby všetky počty bodiek mali rovnakú šancu padnúť. Takéto kocky sa nazývajú „ideálne kocky“ alebo „spravodlivé kocky“.

4 Skúste postaviť hraciu kocku a) na hranu, b) na roh.

Nevieme, ako vám, ale nám sa to nepodarilo ani po 10-minútovom snažení. Teraz si predstavte, že by ste mali hodiť kocku tak, aby zostala stáť na hrane či rohu. Je to v podstate nemožné.
Znamená to, že keď hodíme kockou, máme istotu, že padne jeden z počtov 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 bodiek. Istota má pravdepodobnosť 1. Každá zo 6 možností má rovnakú šancu padnúť. Preto pravdepodobnosť, že pri hodení kockou padne napr. 1 bodka, je 6-krát menšia ako istota, teda $\frac{1}{6}$*. Tento výsledok si môžeme predstaviť aj tak, že zo všetkých 6 možných výsledkov sa pýtame na pravdepodobnosť jedného konkrétneho výsledku.*

5 Aká je pravdepodobnosť, že pri hodení hracou kockou a) padnú 2 bodky, b) padnú 3 bodky, c) padnú 4 bodky, d) padne 5 bodiek, e) padne 6 bodiek?

6 Aká je pravdepodobnosť, že pri hodení hracou kockou a) padnú viac ako 4 bodky, b) padne párny počet bodiek, c) padne menej ako 4 bodky?

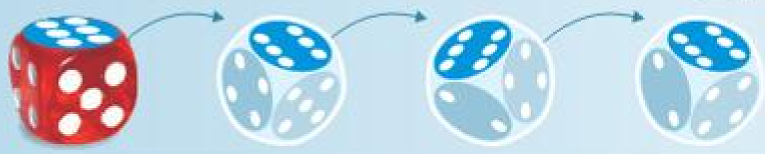
Riešili ste časť a) predchádzajúcej úlohy rovnako ako Zlatica?

Zlatica:
To, že padnú viac ako 4 bodky, znamená, že padne 5 alebo 6 bodiek.
To sú dve rovnako pravdepodobné možnosti zo všetkých šiestich.
Preto výsledná pravdepodobnosť bude $\frac{2}{6}$, teda $\frac{1}{3}$.

7 Aká je pravdepodobnosť, že pri hode jednou kockou padne a) číslo od 2 do 5, b) nepárne číslo?

V predchádzajúcich úlohách sme predpokladali, že aj hádzanie kockou je vyslovene náhodné.
Pozrite sa, ako hádže kockou Filip. Hore si dá 6 bodiek a hodí.

Filip:



8 S akou pravdepodobnosťou padá 6 bodiek pri Filipovom hádzaní?

***V**ráťme sa k úlohe, na koľký pokus padá číslo 6 najčastejšie.*
Karol pri nej uvažoval takto:

Karol:
Šanca, že šestka padne presne na prvý raz, je 1/6, lebo môže padnúť spolu 6 čísel.
Ako vypočítať šancu, že šestka padne presne na desiaty raz?
To by znamenalo, že NESMIE padnúť v prvom hode, NESMIE padnúť v druhom hode... NESMIE padnúť v deviatom hode a MUSÍ padnúť v desiatom hode.
To je predsa menšia šanca ako to, že MUSÍ padnúť na prvý raz.
Vychádza mi, že čím neskôr má šestka padnúť, tým je menšia šanca, že sa to stane.

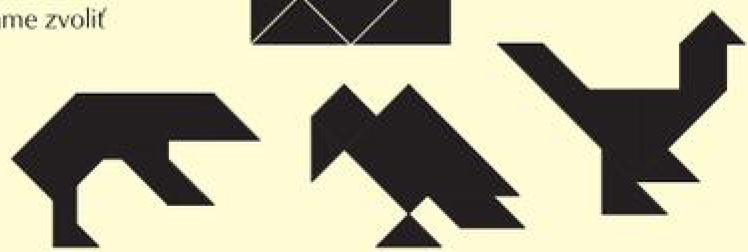
9 Čo poviete na jeho úvahu?

10 Na koľký raz padá najčastejšie číslo 4? A na koľký raz číslo 3? Uskutočnite experiment alebo riešte úvahou.

Tangram 2

Spomínate si na tangram? Pomocou už pripravených dielov tangramu zložte nasledujúce obrázky. Ak dieliky nemáte, pripravte si nové z tvrdého papiera. Dĺžku strany veľkého štvorca odporúčame zvoliť približne 10 – 12 cm.

Úloha 1: Zložte nasledujúce obrázky zvierat:



Hádžeme mincami

Okrem hádzania kockou sa niekedy hádže aj mincou.

Experiment 3

Hádžeme dvoma 50-centovými mincami. Vieme, že po hodení môže nastať jeden z týchto 3 prípadov:

1. na obidvoch padne národná strana mince (Bratislavský hrad),
2. na obidvoch padne spoločná strana mince (hodnota 50 centov a mapa Európy),
3. na minciach padnú rôzne strany (jedna národná strana a jedna spoločná).

a) Odhadnite pravdepodobnosti týchto troch javov.
b) Urobte experiment a hádžte dvoma mincami 50-krát. Výsledky experimentu zaznamenávajte a porovnajte so svojím odhadom.

Vyšlo vám to isté ako Karolovi?

Karol:
Pri experimente mi z 50 pokusov padla 11-krát na oboch minciach národná strana mince, 13-krát na obidvoch minciach spoločná strana a 26-krát mi padli rôzne strany. Vyzerá to tak, že to, že na minciach padnú rozdielne strany, má dvakrát väčšiu pravdepodobnosť ako to, že na obidvoch minciach padne národná strana. Táto šanca je tiež dvakrát väčšia ako šanca, že na oboch minciach padne spoločná strana.

Experiment 4

Tentoraz budete hádzať jednou 50-centovou mincou a jednou 1-eurovou mincou. Opäť si budete značiť, či na obidvoch minciach padla národná strana, alebo na oboch padla spoločná strana, prípadne či na minciach padli rôzne strany. Najskôr urobte odhad a potom uskutočnite experiment.

Karol:
Teraz mi je to jasnejšie. Sú totiž štyri rovnako pravdepodobné možnosti, čo môže padnúť:

Minca	1. možnosť	2. možnosť	3. možnosť	4. možnosť
50 c	spoločná	národná	národná	spoločná
1 €	spoločná	národná	spoločná	národná

Každá z týchto 4 možností by mala rovnakú pravdepodobnosť: 1 : 4 = 0,25. V experimente 4 sme však 3. a 4. možnosť vyhodnocovali spoločne ako jednu možnosť. Preto je pravdepodobnosť tejto „dvojmožnosti" dvakrát väčšia.

Natália:
Rovnako to bude aj vtedy, keď namiesto jednej 1-eurovej a jednej 50-centovej mince hádžeme dvoma 50-centovými mincami ako v experimente 3. Preto aj tam vychádza dvakrát väčšia pravdepodobnosť, že padnú rozdielne strany.

1 Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvojeurovou mincou padne a) národná strana mince (znak krajiny), b) spoločná strana mince (znak 2 eur)?

2 Hodíme naraz jednoeurovou aj dvojeurovou mincou. Aká je pravdepodobnosť, že a) na oboch minciach padne národná strana mince, b) na jednoeurovej minci padne národná strana a na dvojeurovej minci spoločná strana, c) na jednej minci padne národná strana a na druhej minci spoločná strana, d) na jednoeurovej minci padne spoločná strana a na dvojeurovej minci národná strana?

3 Ako by sa zmenilo riešenie častí a) a c) predchádzajúcej úlohy, keby sme hádzali dvoma jednoeurovými mincami?

4 Aká je pravdepodobnosť, že pri hode troma jednoeurovými mincami a) padne na všetkých troch národná strana, b) padne na všetkých troch spoločná strana, c) padne na dvoch národná a na jednej spoločná strana mince?

Hráme sa ďalšie hry

Okrem hier s kockami existuje množstvo iných hier, v ktorých vystupuje náhoda. Pozrime sa na také hry. Najskôr však vyriešte tri úlohy.

1 Pripravte si 8 lístkov s číslami od 1 do 8. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme jedno z čísel 1, 2, 3?

2 Pripravte si 3 červené a 5 modrých lístkov. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme červený lístok?

3 Pripravte si namiesto lístkov guľôčky: 3 červené a 5 modrých rovnakých guľôčok (alebo iných predmetov). Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme červenú guľôčku?

Vyšlo vám vo všetkých troch úlohách také isté riešenie? Myslíte si, že to je náhoda?

Peter:
Úlohy 2 a 3 sú rovnaké, len namiesto lístkov sú tam guľôčky. Úloha 1 je však úplne iná, lebo tam je každý lístok inakší.

Soňa:
Keby si vedel, ako som si pripravila farebné lístky, hovoril by si niečo iné. Zobrala som si lístky s číslami z prvej hry a lístky s číslami 1, 2, 3 som zafarbila načerveno a lístky s číslami 4, 5, 6, 7, 8 som zafarbila namodro.

Začíname sa hrať.

4 Vo vrecúšku sú 3 červené a 5 modrých guľôčok. Peter a Viera hrajú túto hru: Z vrecúška náhodne vyberú 1 guľôčku. Ak je červená, vyhráva Peter. Ak je modrá, vyhráva Viera. Aká je šanca, že a) prvú, b) druhú, c) siedmu hru vyhrá Peter? Pozor, vždy sa hrá so všetkými guľôčkami (teda po každom ťahu vytiahnutú guľôčku vrátime do vrecúška, a až potom znovu ťaháme).

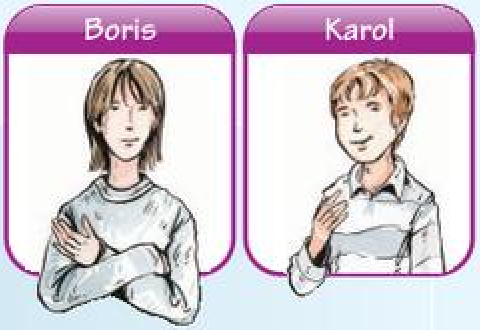
Aj vy ste si uvedomili, že každá hra sa hrá odznova, a teda Peter bude mať pred každou hrou rovnakú šancu? Tá je $\frac{3}{8} = 0{,}375$*, lebo je to vlastne to isté ako v prvých troch úlohách.*

Vidíme, že táto hra je pre Petra nevýhodná. Zistil to aj Peter, a tak navrhol Viere inú hru:
Vytiahnu z vrecúška vždy 2 guľôčky. Ak budú rovnakej farby, vyhrá Peter. Ak však budú rôznej farby, vyhrá Viera. Viera súhlasila, a tak sa začali hrať.

Experiment 5 Najprv tipujte, kto by na tom mal byť po 50 hrách lepšie. Viera alebo Peter? Potom zahrajte v skupine 50 hier (ak nemáte guľôčky, použite farebné lístky). Zapisujte si, koľkokrát by vyhrala Viera a koľkokrát Peter. Zistite, kto z nich by v týchto 50 hrách dopadol lepšie.

5 Na základe experimentu a) vo vašej skupine, b) v celej triede skúste určiť, pre koho je táto hra nevýhodná.

Poďme teraz výpočtom zistiť, pre koho je predchádzajúca hra výhodná a pre koho nevýhodná. Na začiatku musíme zistiť, aké možnosti máme a aké sú šance pre jednotlivé možnosti.



Boris:
Sú 3 možnosti: vytiahneme 2 červené guľôčky alebo 2 modré guľôčky, alebo 1 modrú a 1 červenú guľôčku. V prvých dvoch prípadoch vyhrá Peter, v treťom Viera. Preto Peter má 2-krát väčšiu pravdepodobnosť výhry ako Viera.

Karol:
Experiment však dopadol úplne inak. To nemôže byť dobre.

Už to mám. Sú až 4 možnosti: buď vytiahneme 2 červené guľôčky, alebo 2 modré guľôčky, alebo prvú modrú a druhú červenú, prípadne druhú modrú a prvú červenú.

Boris:
Podľa tohto by mali rovnakú pravdepodobnosť, ale experiment naznačuje, že výhodu, aj keď malú, má Viera.

Peter:
No vaše tri možnosti ani štyri možnosti nemajú rovnakú šancu. Veď šanca vytiahnuť dve červené guľôčky je určite menšia ako šanca vytiahnuť 2 modré guľôčky, pretože červených guľôčok je menej ako modrých.

Karol:
Máš pravdu. Musíme to urobiť tak, aby všetky prípady, o ktorých sa budeme rozprávať, mali rovnakú šancu.

Boris:
Za možnosti teda zoberme dvojice guľôčok bez ohľadu na farbu. Veď je rovnaká šanca, že vytiahneme ktorúkoľvek dvojicu guľôčok.

Karol:
To je pravda. Keby si bol farboslepý, bolo by úplne jasné, že každá dvojica má rovnakú šancu byť vytiahnutá.

Boris:
Takže máme 3 červené guľôčky, ktoré si v duchu označím C1, C2, C3 a 5 modrých guľôčok: M1, M2, M3, M4, M5.

6 Zistite, koľko je všetkých dvojíc guľôčok.

Riešili ste úlohu vypísaním všetkých možností?

7 Zistite, koľko je takých dvojíc, pri ktorých vyhráva a) Peter, b) Viera.

8 Určte, pre koho je táto hra nevýhodná.

Je vaše riešenie rovnaké, ako má Karol?

Karol:
Vypíšem si všetky možnosti. Modrou farbou budem písať tie, pri ktorých vyhrá Peter. Teda tie, keď sme vybrali dve guľôčky rovnakej farby.
C1 + C2, C1 + C3, C1 + M1, C1 + M2, C1 + M3, C1 + M4, C1 + M5,
C2 + C3, C2 + M1, C2 + M2, C2 + M3, C2 + M4, C2 + M5,
C3 + M1, C3 + M2, C3 + M3, C3 + M4, C3 + M5,
M1 + M2, M1 + M3, M1 + M4, M1 + M5,
M2 + M3, M2 + M4, M2 + M5,
M3 + M4, M3 + M5,
M4 + M5.

9 Vysvetlite systém Karolovho vypisovania.

10 Čo poviete na Boženinu výhradu?

Božena:
Polovica možností ti chýba. Napríklad si zabudol na možnosť C2 + C1, ktorá je iná, ako možnosť C1 + C2.

Karol:
Vidím, že všetkých rovnocenných možností je $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

Potom 1 možnosť má pravdepodobnosť $\frac{1}{28}$. „Petrových" – modrých možností je 13. Preto pravdepodobnosť, že vyhrá Peter, je $\frac{13}{28} = 0{,}464\ 2...$ Je to menej ako polovica, preto je to pre Petra stále nevýhodná hra.

11 Porovnajte Karolovo vypisovanie s Emilovým obrázkom.
Čo je podľa vás prehľadnejšie?

Emil:

	C1	C2	C3	M1	M2	M3	M4	M5
C1								
C2								
C3								
M1								
M2								
M3								
M4								
M5								

Po tomto zistení Peter navrhol Viere ďalšiu hru.

Peter:
Budeme hrať to isté ako v predchádzajúcej hre, len odoberieme 1 modrú guľôčku.

12 Ako to dopadne teraz? Zistite, pre koho je hra s 3 červenými a so 4 modrými guľôčkami nevýhodná. Využijete pri výpočtoch vypisovanie možností?

13 Ako by to dopadlo, keby sme namiesto odobratia modrej guľôčky jednu modrú guľôčku pridali?

14 Navrhnite vlastnú hru, v ktorej vystupuje náhoda. Napíšte jej pravidlá na papier. Potom si papiere vymeňte. Analyzujte hru inej skupiny, ktorú máte pred sebou. Kto vymyslel najzaujímavejšiu hru?

Vyberáme skupiny

Pozrime sa na ďalšiu situáciu, kde sa stretnete s pravdepodobnosťou. *Z jednej triedy sa na vedomostnú súťaž pripravovalo 5 dievčat a 8 chlapcov. Tesne pred súťažou majú spravodlivo vylosovať jeden zmiešaný pár, ktorý bude na súťaži reprezentovať triedu.*

1 Navrhnite a pripravte žrebovacie lístky na a) dvojkolové losovanie, b) jednokolové losovanie zmiešaného páru. Koľko lístkov musíte pripraviť?

Aj vy ste navrhli, že v časti a) pri dvojkolovom losovaní sa budú losovať zvlášť chlapci a zvlášť dievčatá a v časti b) pri jednokolovom losovaní sa bude losovať celý súťažný pár naraz? V tom prípade ste v časti b) museli pripraviť až 40 lístkov.

2 Jedno z piatich dievčat je Gabriela. Zistite, aká je pravdepodobnosť, že ju spomedzi dievčat vylosujú a) pri dvojkolovom, b) pri jednokolovom losovaní. Ešte pred počítaním tipujte, pri ktorom losovaní má väčšiu šancu.

Asi je vám jasné, že ak sú obidve losovania spravodlivé, musia byť šance v oboch losovaniach rovnaké. Skontrolujme, či použitím výpočtov dospejeme k rovnakej odpovedi.
Pri jednokolovom losovaní má všetkých 40 párov rovnakú šancu na vylosovanie. Preto vytiahnutie ktoréhokoľvek konkrétneho páru má pravdepodobnosť $\frac{1}{40}$. Párov, v ktorých je Gabriela, je 8 (s každým chlapcom), preto výsledná pravdepodobnosť je $\frac{8}{40} = 0{,}2$. Pri dvojkolovom systéme na losovaní chlapcov nezáleží. Gabriela je jedno z 5 dievčat, preto príslušná pravdepodobnosť je $\frac{1}{5} = 0{,}2$.

Skutočne sme obidvoma výpočtami dostali ten istý výsledok.

3 Ktorá šanca je väčšia? Že z chlapcov vylosujú Adama alebo že z dievčat vylosujú Evu?

4 Aká je pravdepodobnosť, že nevylosujú ani jedného z dvojice Adam, Eva?

Riešili ste úlohu rovnako ako Elena?

Elena:
Dvojíc, kde nie je ani Adam, ani Eva, je 28. Každé zo 4 zvyšných dievčat môže byť v páre s každým zo 7 zvyšných chlapcov. Príslušná pravdepodobnosť potom je $\frac{28}{40} = 0{,}7$.

5 Aká je pravdepodobnosť, že nevylosujú ani jedného chlapca z dvojice Adam, Emil?

6 Aká je pravdepodobnosť, že nevylosujú ani jedno dievča z dvojice Gabriela, Eva?

Vedúci klubu chce spravodlivo vylosovať trojicu na vystúpenie – 1 chlapca a 2 dievčatá – zo 4 chlapcov a 7 dievčat.

7 Navrhnite 2 rôzne spôsoby losovania, ktoré môže mať aj viac kôl.

8 Jeden z chlapcov sa volá Adam, jedno z dievčat je Eva. Najprv odhadnite a potom vypočítajte: Kto má väčšiu šancu, že ho vylosujú? Adam alebo Eva?

Pravdepodobnosť vytiahnutia Adama v podstate netreba počítať. Je predsa jeden zo 4 chlapcov s rovnakou šancou, teda pravdepodobnosť jeho vylosovania je $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Pri dievčatách je to ťažšie, lebo treba vybrať až dve. Treba preto zistiť, koľko je všetkých dvojíc.

My ich budeme vypisovať podľa abecedy. Dievčatá označíme A, B, C, D, E, F, G.

AB, AC, AD, AE, AF, AG,
BC, BD, BE, BF, BG,
CD, CE, CF, CG,
DE, DF, DG,
EF, EG,
FG

Všetkých dvojíc je 21. Eva, teda E, je v 6 dvojiciach. Pravdepodobnosť jej vylosovania je $\frac{6}{21} = 0{,}285\,71...$, čiže väčšia ako pravdepodobnosť vylosovania Adama.

9 Aká je pravdepodobnosť, že vylosujú obidvoch – Evu aj Adama? Pomôžte si jednokolovým losovaním.

Pri jednokolovom losovaní by bolo treba pripraviť lístky so všetkými trojicami – 2 dievčatá a 1 chlapec. Pokúste sa doplniť chýbajúce čísla v Haninom riešení.

Hana:
V predchádzajúcej úlohe sme zistili, že je ..... dvojíc dievčat. Ku každej treba pridať jedného zo ..... chlapcov. To znamená, že by bolo ..... · ..... = ... všetkých trojíc, ktoré môžu byť vylosované. Tých „správnych" pre Adama aj Evu je len .....: K dvojiciam, kde je Eva, sa pridá Adam (alebo inak: k dvojici Adam, Eva sa pridá jedno zo ..... dievčat). Celková pravdepodobnosť je ....., čo je s presnosťou na tisíciny 0,071.

Nakoniec sa zmenili podmienky a vedúci klubu mal vybrať 2 chlapcov a 1 dievča.

10 Navrhnite opäť 2 rôzne spôsoby losovania. Losovanie môže mať aj viac kôl.

11 Najprv odhadnite a potom vypočítajte. Kto má väčšiu šancu, že ho vylosujú? Adam alebo Eva?

12 Aká je pravdepodobnosť, že vylosujú obidvoch, čiže Evu aj Adama?

V tanečnom country klube je 5 dievčat a 5 chlapcov.
Vedúci klubu sa chystá spravodlivo vylosovať päticu – 2 dievčatá a 3 chlapcov na vystúpenie.

13 Navrhnite a pripravte 1 spôsob losovania. Losovanie môže mať aj viac kôl.

14 Čo je väčšia šanca? Že vylosujú Adama, alebo že vylosujú Evu?

15 Čo je väčšia šanca? Že nevylosujú Adama, alebo že nevylosujú Evu?

Hazardné hry

Podobnými úvahami, o ktorých sa rozprávame pri výpočte šancí a pravdepodobnosti, sa ľudia zaoberali aj v minulosti. Často to bolo pri hazardných hrách, kde sa hralo o peniaze či majetky. Mnohí ľudia práve vinou takýchto hier prišli o veľkú časť svojho majetku. Aj v súčasnosti existuje mnoho hazardných hier. Je dôležité uvedomiť si, že každá hra, automat alebo ruleta sú vymyslené tak, aby ich organizátor vyhrával. Z toho však nutne vyplýva, že hráč prehráva. Preto je rozumnejšie sa hazardným hrám vyhnúť.
Stávky, kartové hry a iné hazardné hry skúmali v minulosti mnohí matematici. Boli medzi nimi aj Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Jakob Bernoulli a Christiaan Huygens.


Blaise Pascal


Pierre de Fermat


Jakob Bernoulli


Christiaan Huygens

Aby vám bolo jasné, že hazardné hry sú pre hráčov často veľmi nevýhodné, pozrime sa spoločne na niekoľko obmien jednej takejto jednoduchej hry.

Experiment 6

Predstavte si, že za každý hod hracou kockou zaplatíte (bankárovi) 1 cent. Keď hodíte šestku, dostanete (od bankára) 10 centov, inak nedostanete nič. Potom sa hra začne odznovu.
Zahrajte si túto hru v triede spolu 50-krát. Namiesto platenia centov si vklady a výhry iba zapisujte. Celý experiment prehľadne zapíšte.

1 Pre koho vám vyšla táto hra nespravodlivá? Pre bankára alebo pre vás? Vyšlo to v každej dvojici rovnako?

2 Vráťte sa k zápisu výsledkov experimentu 6. Zistite, ako sa zmenia výhry, keby vám bankár pri padnutí čísla šesť nedával 10 centov, ale a) 8 centov, b) 6 centov, c) 4 centy, d) 5 centov, e) 3 centy.

3 Pre koho vám vyšla táto hra v jednotlivých prípadoch v predchádzajúcej úlohe nespravodlivá? Pre bankára alebo pre vás?

4 S akou pravdepodobnosťou budete mať po dvoch hrách – kolách – pôvodnej hry a) o 18 centov viac, b) o 2 centy menej, c) o 10 centov viac?

5 Aká je pravdepodobnosť, že po 2 hrách bude úspešný hráč a nie bankár?

Pozrite sa, ako úlohu riešila Zuzana.

Zuzana:
Pri dvoch partiách budem úspešná, ak vyhrám aspoň jednu hru.
To znamená, že neúspešná budem iba vtedy, keď ani raz nepadne šestka.
Pri dvoch pokusoch máme 36 možností:

11 12 13 14 15 16
21 22 ...
...

6 Skontrolujte, či má Zuzana pravdu a či je skutočne 36 možností.

Zuzana:
Z nich je 11 priaznivých (padla šestka) a 25 nepriaznivých (nepadla šestka).
Preto pravdepodobnosť, že budem úspešná, je $\frac{11}{36}$.

7 Komu sa oplatí hrať túto hru, bankárovi alebo hráčovi, ak sa hrá a) len jedna hra, b) šesť hier, c) 120 hier?

Pri 120 hrách už možno očakávať, že asi v $\frac{1}{6}$ prípadov padne číslo 6 a asi v $\frac{5}{6}$ prípadov číslo 6 nepadne. Teda celková situácia po 120 hrách môže byť asi takáto: bankár získa 120 centov a zaplatí asi 200 centov, hráč naopak.

8 Riešte úlohu 5 pre prípad, keď váš základný vklad nebude 1 cent, ale a) 2 centy, b) 4 centy, c) 5 centov, d) 6 centov, e) 8 centov.

V živote sa to rôznymi ponukami „na výhru" v súťaži len tak hemží. Treba však byť ostražitý. Takéto hry vždy organizuje niekto, aby zarobil on a nie vy. Preto je veľmi pravdepodobné, že po zapojení sa do hry prídete o peniaze a nič nevyhráte.

Pozrite si reklamu na jednu SMS hru.

9 Aká je pravdepodobnosť, že motorku vyhráte práve vy, ak pošlete 1 SMS správu?

10 Koľko eur zarobí organizátor hry, ak súťažiaci spolu pošlú a) 100, b) 1 000, c) 5 000, d) 8 000, e) 12 450 esemesiek? Nezabudnite, že pri každej 5 000. SMS musí vyplatiť výhru – motorku – v hodnote 3 333 €.

V predchádzajúcej úlohe ste videli, že organizátor zarobí vždy. Každý súťažiaci, ktorý vloží 2 €, má šancu len 0,000 2, že vyhrá motorku.

Ak ste sa ešte nepoučili, ponúkame vám ďalšiu – „výhodnejšiu" – SMS hru.

11 Ivan, ktorý sa zapojil do SMS hry o motorku (samozrejme, že nevyhral) pozorne počítal:

Ivan:
Mobil stojí 111 €. Stačí mi poslať 50 esemesiek po 2 € a mobil mám istý. Zarobím vlastne 11 €.

Má Ivan pravdu?

12 Ivan po skončení výpočtov neváhal a poslal 50 SMS. Na svoje veľké prekvapenie mobil nevyhral. Ako je to možné?

Okrem toho, že Ivan nevyhral mobil, sa ešte aj čudoval, keď mu prišiel účet za telefón.

Párne či nepárne?

***V**ráťme sa ešte ku kockám.*
*Predstavte si, že budete hádzať kockou a zapisovať, či padlo párne číslo – **P** (2, 4, 6) –, alebo nepárne číslo – **N** (1, 3, 5). Hádzať budete dovtedy, kým sa v postupnosti zápisov neobjaví za sebou trojica **PNN** alebo trojica **NNP**. Teda napríklad pri hodoch NPNP**PNN** padlo skôr PNN.*
Pred začiatkom hádzania sa so súperom dohodnite, kto vyhráva pri trojici PNN a kto pri trojici NNP.

1 Ktorú trojicu si máte vybrať, aby ste mali väčšiu šancu na výhru?

Experiment 7 Hádžte kockou dovtedy, kým sa neobjaví jedna z trojíc PNN – NNP. Zapisujte si, ktorá trojica sa objavila ako prvá. Hádžte dovtedy, kým nebudete mať aspoň 20 pokusov, ktorá trojica padla skôr. Ktorá trojica sa u vás objavuje častejšie? Ako je to u vašich spolužiakov?

Aj vám vyšli veľké rozdiely medzi tým, koľkokrát sa ako prvá objaví trojica PNN a koľkokrát trojica NNP? Pokúsme sa úvahou prísť na to, prečo je to tak.

Milan si napísal všetky trojice z písmen P a N.

Milan:
PPP, PPN, PNP, NPP, NNN, NNP, NPN, PNN

Zistil, že všetkých trojíc je osem. Na základe toho povedal, že aj možnosť PNN, aj možnosť NNP má rovnakú šancu na výhru. Hra je teda podľa neho spravodlivá a je jedno, ktorú možnosť si vyberie on a ktorú súper.

2 Čo poviete na Milanov argument?

Jana si do zošita nakreslila takýto obrázok:

Jana:

P → P vyhrať môže iba PNN
P → N vyhrať môže iba PNN

N → P vyhrať môže iba PNN
N → N vyhrať môže iba NNP

3 Vysvetlite Janin obrázok. Prečo ak hodíme PP, môže vyhrať iba možnosť PNN?

Tu je Janino vysvetlenie:

Jana:
Aby vyhralo NNP, musíme za sebou hodiť NN. Keďže sme už hodili PP, tak ak hodíme hocikedy v budúcnosti prvý raz NN, bude mu predchádzať P. Možnosť PNN teda nastane skôr.

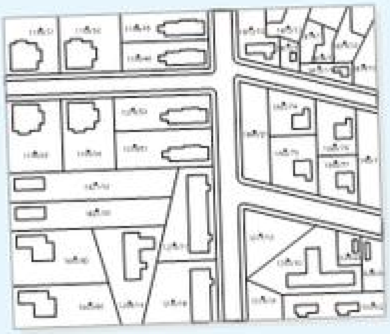
4 a) Prečo ak hodíme PN, môže vyhrať iba možnosť PNN? b) Prečo ak hodíme NP, môže vyhrať iba možnosť PNN? c) Prečo ak hodíme NN, môže vyhrať iba možnosť NNP?

5 Na základe Janinho obrázka a úvahy z predchádzajúcej úlohy povedzte, ktorá možnosť má väčšiu šancu, že padne skôr. Zodpovedá tento výsledok vašim pokusom?

6 Vyriešte podobnú úlohu pre dvojicu a) PP a NP, b) PP a PN.

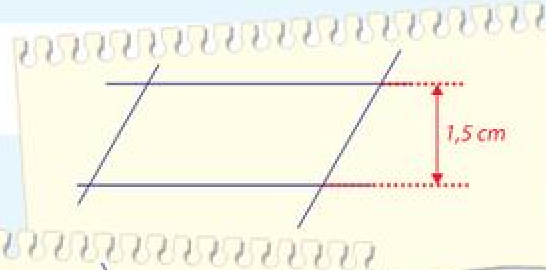
10 OBSAHY GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

Doteraz ste sa učili vypočítať obsah štvorca, obdĺžnika a pravouhlého trojuholníka. V živote sa však často stretnete aj s potrebou vypočítať napr. obsah pozemku, ktorého tvar je napr. rovnobežník, lichobežník alebo ktorý je nepravidelný. Na obrázku vidíte kúsok takzvanej katastrálnej mapy. Sú na nej vyznačené pozemky – parcely – aj s číslami. Všimnite si rôzne tvary, aké tieto pozemky majú.

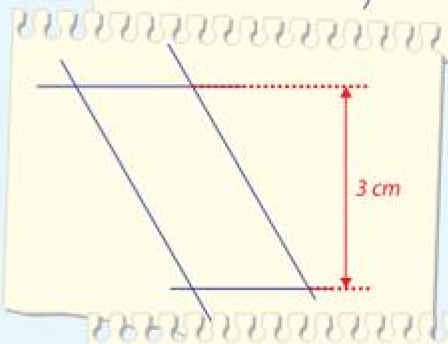


Dôležitým pojmom bude aj tu výška.

Výška a obsah rovnobežníka

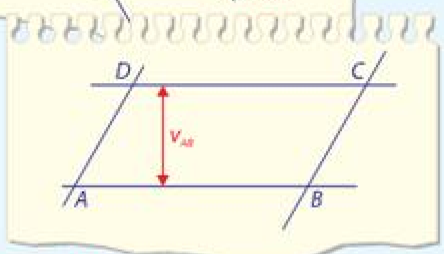


Vzdialenosť rovnobežiek, ktoré ohraničujú rovnobežník, sa volá výška rovnobežníka. Výška rovnobežníka je teda číslo, ktoré určuje, ako ďaleko od seba sú protiľahlé strany rovnobežníka.



1 Viete nájsť ešte inú výšku rovnobežníka na obrázku?

Rovnobežník má dve výšky: jedna z nich je vzdialenosť jednej dvojice rovnobežiek, druhá je vzdialenosť druhej dvojice rovnobežiek. Aby sme ich od seba odlíšili, označujeme výšku tak, ako vidíte na obrázku:



Označenie v_{AB} prečítame jednoducho: výška na stranu AB.

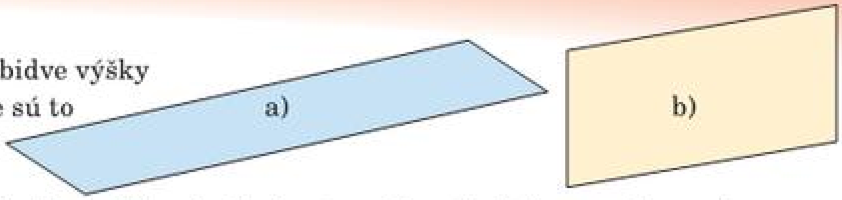
2 Červená výška na obrázku by sa mohla volať aj inak. Nájdite jej pomenovanie iné ako v_{AB}.

Veríme, že ste prišli na to, že by sa mohla volať aj v_{CD}. Ak si spomínate, že stranu AB voláme aj strana a, tak by sa táto výška mohla volať aj v_a alebo v_c.

3 Nájdite štyri rôzne pomenovania druhej výšky rovnobežníka *ABCD*.

4 Narysujte do zošita rovnobežník. Zistite jeho výšky. Svoje riešenie si skontrolujte so spolužiakom.

5 Pomocou pravítka určte obidve výšky rovnobežníka, ak viete, že sú to v centimetroch celé čísla.



6 Narysujte do zošita rovnobežky vzdialené od seba 3 cm. Označte ich p a r. Dorysujte do obrázka priamku s rovnobežnú s priamkami p aj r, vzdialenú od priamky p 4 cm. Aká je vzdialenosť priamok s a r?

7 Nájdete ešte inú polohu priamky s v predchádzajúcej úlohe? Aká je teraz vzdialenosť priamok s a r?

8 Narysujte do zošita 2 ľubovoľné rovnobežky. Potom narysujte rovnobežku, a) ktorá je rovnako vzdialená od oboch rovnobežiek, b) ktorej vzdialenosti od rovnobežiek sú v pomere 1 : 2. Pomôžte si meraním a výpočtom.

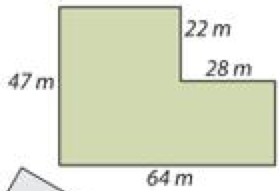
9 Nájdete aj druhé riešenie časti b) predchádzajúcej úlohy?

Prv než sa pozrieme, ako možno vypočítať obsah rovnobežníka, zopakujeme si výpočty obsahov, ktoré sme sa už učili.

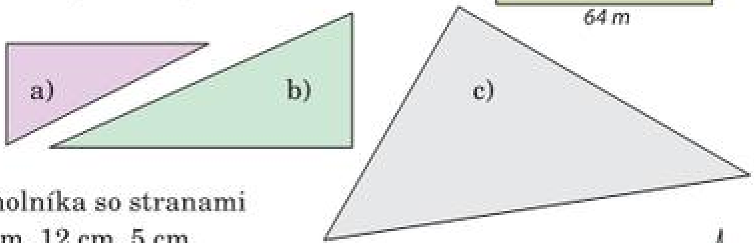
10 Vypočítajte obsah obdĺžnika s rozmermi a) 4 cm a 7 cm, b) 3,2 dm a 4,1 dm, c) 6,4 cm a 12 mm.

11 Vyjadrite obsah obdĺžnika z časti b) predchádzajúcej úlohy v: a) cm^2, b) mm^2, c) m^2.

12 Vypočítajte obsah pozemku znázorneného na obrázku v: a) m^2, b)ároch, c) hektároch. Susedné strany sú vždy na seba kolmé.

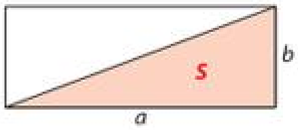


13 Určte obsah pravouhlých trojuholníkov na obrázku. Potrebné strany si odmerajte.

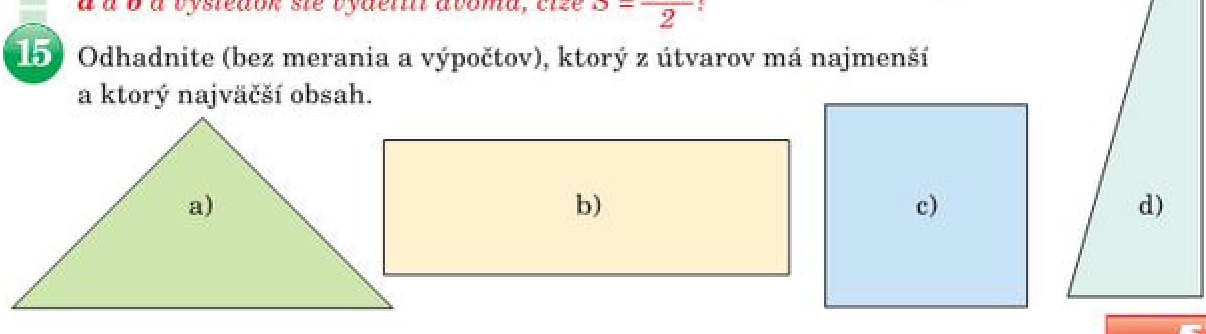


14 Určte obsah pravouhlého trojuholníka so stranami a) 4,5 cm, 6 cm a 7,5 cm, b) 13 cm, 12 cm, 5 cm.

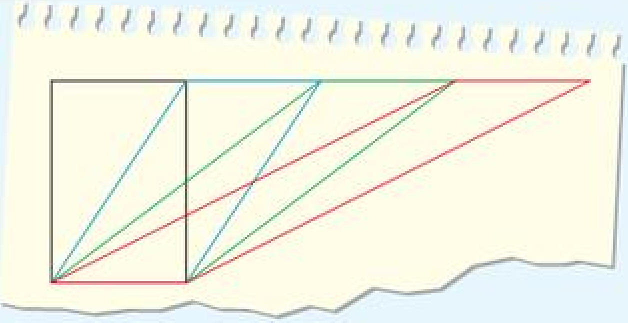
Počítali ste obsah S pravouhlého trojuholníka tak, že ste vynásobili dĺžky jeho dvoch kratších strán (odvesien) ***a*** *a* ***b*** *a výsledok ste vydelili dvoma, čiže* $S = \frac{a \cdot b}{2}$?



15 Odhadnite (bez merania a výpočtov), ktorý z útvarov má najmenší a ktorý najväčší obsah.



P *o krátkom zopakovaní niektorých výpočtov sa vrátime k obsahu rovnobežníka.*



16 Na obrázku sú 4 rovnobežníky. Jeden z nich je obdĺžnik s rozmermi 2 cm a 3 cm. Odhadnite, ktorý z nich bude mať najväčší a ktorý najmenší obsah.

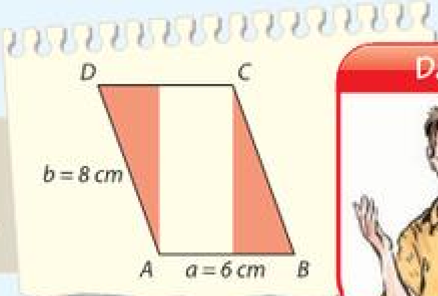
17 Narysujte rovnobežník $ABCD$ so stranami $a = 6$ cm a $b = 8$ cm a uhlom $\alpha = 110°$. Skúste čo najpresnejšie určiť jeho obsah. Pomôžte si meraním a tým, že rovnobežník $ABCD$ rozdelíte na útvary, ktorých obsah viete vypočítať.

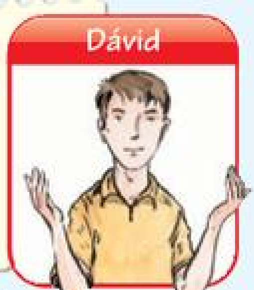
Spomenuli ste si, že vieme vypočítať obsah štvorca, obdĺžnika a pravouhlého trojuholníka?

18 Ak ste to ešte nevypočítali, rozdeľte rovnobežník $ABCD$ na dva pravouhlé trojuholníky a jeden obdĺžnik. Potom vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$.

Postupovali ste pri rozdeľovaní a výpočtoch rovnako ako Dávid?

Dávid:
Ja som si rovnobežník rozdelil na dva rovnaké pravouhlé trojuholníky a jeden obdĺžnik takto:





19 Dokážte, že dva pravouhlé trojuholníky, ktoré dostal Dávid, sú zhodné.

Dávid:
Odmeral som si dĺžku strán obdĺžnika. Vyšlo mi 7,5 cm a 3,3 cm. Obsah obdĺžnika je potom 7,5 cm · 3,3 cm = 24,75 cm^2. Kratšia strana každého pravouhlého trojuholníka meria približne 2,7 cm. Obsah oboch pravouhlých trojuholníkov je (7,5 cm · 2,7 cm) : 2 = 10,125 cm^2. Spolu je obsah 24,75 cm^2 + 10,125 cm^2 + 10,125 cm^2 = 45 cm^2. Vyšlo mi približne 45 cm^2.

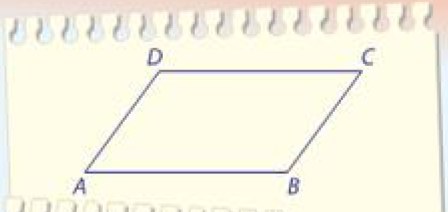
20 Rovnobežník $ABCD$ sa dá rozdeliť na dva pravouhlé trojuholníky a jeden obdĺžnik ešte jedným spôsobom. Urobte to a vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$ pomocou tohto rozdelenia. Vyšiel vám rovnaký obsah ako 1. spôsobom?

21 a) Narysujte rovnobežník $ABCD$ podľa nasledujúceho postupu:

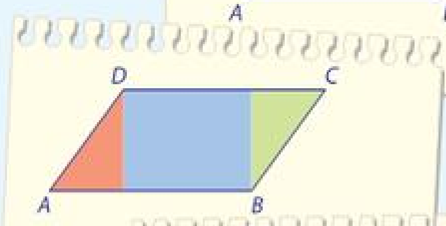
1. *Rovnobežky **p**, **r** vzdialené od seba 4 cm.*
2. *Bod **A** na priamke **p**, bod **D** na priamke **r** tak, aby | AD | = 6 cm.*
3. *Rovnobežku **t** s priamkou **AD** vzdialenú od **AD** 3 cm.*
4. *Priesečník priamky **t** s priamkou **p** označte **B**. Priesečník priamky **t** s priamkou **r** označte **C**.*
5. *Rovnobežník **ABCD**.*

b) Oboma spôsobmi rozdelenia, ktoré sme použili v predchádzajúcich úlohách, čo najpresnejšie vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$.

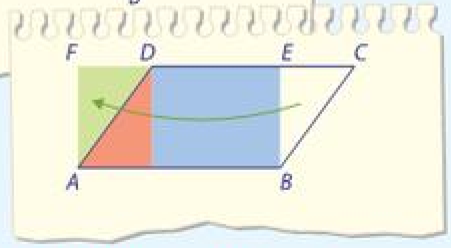
Teraz sa pokúsime objaviť vzťah pre obsah rovnobežníka. Nakreslime ľubovoľný rovnobežník ABCD:



Rozdeľme ho na dva zhodné pravouhlé trojuholníky a jeden obdĺžnik:



Jeden z dvoch trojuholníkov premiestnime: Vznikne farebný obdĺžnik, ktorý má, samozrejme, rovnaký obsah ako pôvodný rovnobežník.



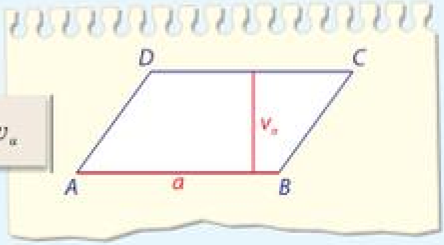
22 Vysvetlite, prečo má pôvodný rovnobežník *ABCD* rovnaký obsah ako farebný obdĺžnik *ABEF*.

Obsah trojfarebného obdĺžnika ABEF sa rovná $|AB| \cdot |BE|$. *Pritom dĺžka strany BE je vlastne výška na stranu AB rovnobežníka ABCD. Tým sme odvodili všeobecný vzťah pre obsah rovnobežníka.*

> **!** Obsah rovnobežníka sa rovná súčinu dĺžky strany rovnobežníka a výšky na túto stranu.

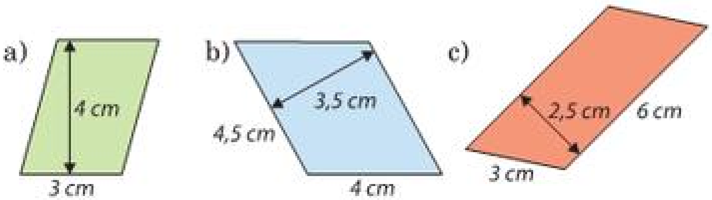
Pomocou premenných môžeme tento vzťah zapísať takto:

$S_{ABCD} = |AB| \cdot v_{AB}$ *alebo* $S_{ABCD} = a \cdot v_a$



Samozrejme, môžeme použiť aj inú stranu a výšku rovnobežníka, vždy to však musí byť výška na použitú stranu. Napr. $S_{ABCD} = |BC| \cdot v_{BC}$ *alebo* $S_{ABCD} = b \cdot v_b$.

23 Určte obsahy rovnobežníkov na obrázku.



24 Narysujte do zošita dva rôzne rovnobežníky. Dvoma spôsobmi vypočítajte obsah každého z týchto rovnobežníkov. Pomôžte si meraním.

25 Keď Klára v predchádzajúcej úlohe počítala dvoma spôsobmi obsahy rovnobežníkov, nevychádzali jej úplne rovnaké obsahy. Ako je to možné?

26 Narysujte do zošita rovnobežník. Potom – bez toho, aby ste merali dĺžky strán alebo výšok – narysujte dva rôzne obdĺžniky s rovnakým obsahom, ako má váš rovnobežník na obrázku.

27 Dokážete v predchádzajúcej úlohe narysovať aj tretí obdĺžnik s rovnakým obsahom?

28 Peter meral dĺžky strán a výšky rozličných rovnobežníkov. Zistite, v ktorých prípadoch určite nemeral dobre.

a) $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $v_a = 7$ cm; $v_b = 5$ cm
b) $a = 2{,}2$ cm; $b = 6{,}6$ cm; $v_a = 4{,}8$ cm; $v_b = 1{,}6$ cm
c) $a = 3{,}6$ cm; $b = 5{,}4$ cm; $v_a = 7{,}5$ cm; $v_b = 5$ cm
d) $a = 2{,}1$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $v_a = 3{,}6$ cm; $v_b = 7{,}2$ cm

29 Vypočítajte chýbajúcu výšku alebo dĺžku druhej strany rovnobežníka, ak je dané:

	a) 1. rovnobežník	b) 2. rovnobežník	c) 3. rovnobežník	d) 4. rovnobežník
a	4 cm	2,4 cm	5,2 cm	12,4 cm
d	6,4 cm		1,8 cm	8,6 cm
v_a	2,5 cm	2,4 cm		
v_d		1,6 cm	3,2 cm	10,6 cm

30 Narysujte kosoštvorec so stranou 4 cm a s výškou 3 cm. Určte jeho obsah.

Uvedomili ste si pri riešení predchádzajúcej úlohy, že obsah kosoštvorca vypočítame rovnako ako obsah rovnobežníka?

31 Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak je dané $v_a = 4$ cm, $|BC| = 6$ cm, $v_b = 3$ cm.

Pomohli ste si pri riešení úlohy 31 tak, že ste vypočítali dĺžku druhej strany rovnobežníka?

Koľko nás bude? (2. časť)

Pripomeňte si tabuľku z 1. časti rubriky Koľko nás bude? zo strany 26.

Úloha 1: Novinár uviedol v reportáži: „Na Slovensku pribudlo v roku 2004 spolu 1 895 obyvateľov." Uvažoval novinár správne, ak len na základe uvedenej tabuľky usúdil, ako sa zmenil počet obyvateľov Slovenska?

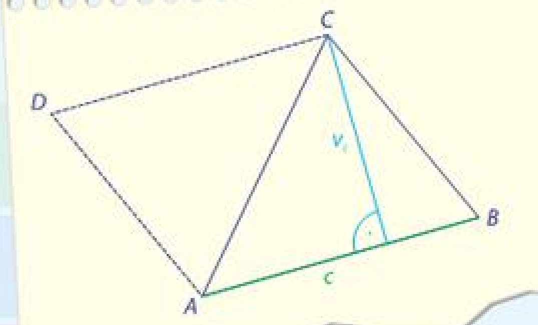
Úloha 2: Na základe tabuľky zo strany 26 čo najpresnejšie prerysujte a dorysujte graf prirodzeného prírastku na Slovensku od roku 2000 do roku 2005. Takýto graf sa volá spojnicový.

Úloha 3: Na základe grafu z predchádzajúcej úlohy čo najpresnejšie odhadnite chýbajúci údaj v tejto tabuľke.

rok	živonarodení	zomretí
2000	55 151	?

Obsah trojuholníka

Teraz sa pozrime, ako môžeme počítať obsah trojuholníka ABC. Pri výpočte využijeme doplnenie na rovnobežník ako v úlohe 15.



Najprv vypočítame obsah rovnobežníka ABCD. Potrebujeme:

- *najskôr odmerať dĺžku strany AB rovnobežníka ABCD, čo je zároveň aj strana c trojuholníka ABC,*
- *potom odmerať výšku na stranu AB rovnobežníka ABCD, čo je zároveň aj výška v_c na stranu c trojuholníka ABC,*
- *a nakoniec ich vynásobiť.*

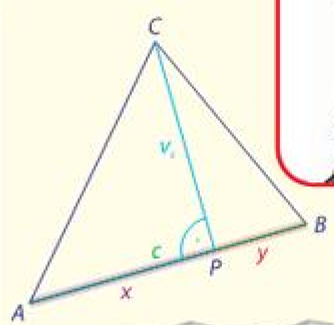
Dostaneme obsah rovnobežníka ABCD: $S_{ABCD} = c \cdot v_c$. Obsah trojuholníka ABC je polovica obsahu rovnobežníka ABCD. Takže

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot v_c}{2}}$$

Podobne by sme dostali, že $S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2}$, resp. $S_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot v_b}{2}$. Práve sme odvodili, že:

> **!** Obsah trojuholníka sa rovná súčinu dĺžky strany trojuholníka a výšky na túto stranu trojuholníka, ktorý je vydelený číslom 2.

Petrovi sa páčil aj spôsob výpočtu obsahu trojuholníka pomocou rozdelenia na dva pravouhlé trojuholníky ako v úlohe 14. Skúsil takto odvodiť vzorec na výpočet obsahu trojuholníka ABC.



Peter:

Chcem zistiť obsahy dvoch pravouhlých trojuholníkov *APC* a *BPC*. Potrebujem preto odmerať výšku na stranu *c* a úseky strany *AB* – úsečku *AP* a *BP*. Tieto dĺžky si označím **x** a **y**.

Zistil som, že **x = 2,8 cm**, **y = 1,4 cm** a **v_c = 3,2 cm**.

Potom už len použijem známe vzorce:

Obsah pravouhlého trojuholníka *APC* je $\frac{2{,}8 \cdot 3{,}2}{2}$ cm².

Obsah pravouhlého trojuholníka *BPC* je $\frac{1{,}4 \cdot 3{,}2}{2}$ cm². Obsah trojuholníka *ABC* potom bude:

$$\frac{2{,}8 \cdot 3{,}2}{2} + \frac{1{,}4 \cdot 3{,}2}{2} = \frac{2{,}8 \cdot 3{,}2 + 1{,}4 \cdot 3{,}2}{2} = \frac{3{,}2 \cdot (2{,}8 + 1{,}4)}{2} = \frac{3{,}2 \cdot 4{,}2}{2} = 6{,}72 \text{ cm}^2.$$

To môžem urobiť ešte raz, ale bez konkrétnych čísel – vo všeobecnom trojuholníku:

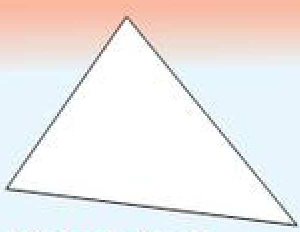
Obsah pravouhlého trojuholníka *APC* je $\frac{x \cdot v_c}{2}$. Obsah pravouhlého trojuholníka *BPC* je $\frac{y \cdot v_c}{2}$.

Obsah trojuholníka *ABC* potom bude:

$$\frac{x \cdot v_c}{2} + \frac{y \cdot v_c}{2} = \frac{x \cdot v_c + y \cdot v_c}{2} = \frac{(x + y) \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}, \text{ lebo } x + y = c.$$

Dostal som teda rovnaký výsledok ako doplnením na rovnobežník: obsah trojuholníka vypočítam ako súčin strany a príslušnej výšky vydelený dvoma.

1 Vypočítajte obsah trojuholníka na obrázku troma spôsobmi tak, že vždy použijete inú stranu.



Veríme, že vám všetkými troma spôsobmi vyšiel približne rovnaký obsah: 6 cm².

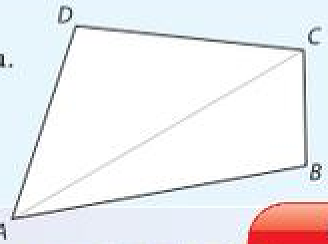
2 Vypočítajte obsahy trojuholníkov z úlohy 7. Viete obsah každého trojuholníka vypočítať tromi spôsobmi tak, že vždy použijete inú výšku?

3 Zostrojte trojuholník a vypočítajte jeho obsah, ak viete, že jeho strany merajú a) 3 cm, 4 cm, 6 cm, b) 7 cm, 7 cm, 8 cm, c) 2,5 cm, 6 cm, 6,5 cm.

4 Určte chýbajúce dĺžky strán alebo výšky v trojuholníkoch s danými obsahmi.

$S_{\Delta ABC}$	$20\ cm^2$	$20\ cm^2$	$13{,}5\ cm^2$	$14{,}8\ cm^2$	$12\ cm^2$
a	4 cm		6 cm		
v_a		4 cm		8 cm	

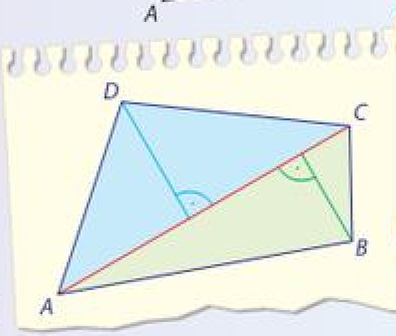
5 Vypočítajte obsah štvoruholníka *ABCD* na obrázku.



Počítali ste obsah štvoruholníka ABCD tak, že ste vypočítali obsahy trojuholníkov ABC a ACD?

Edita:
Do obrázka si dorysujem dve výšky: výšku z bodu *B* na stranu *AC* a výšku z bodu *D* na stranu *AC*.

Teraz je to ľahké: odmeriam dĺžku strany *AC* a obidve výšky. Obsah trojuholníka *ABC* je $\frac{5 \cdot 1{,}5}{2} = 3{,}75\ cm^2$.
Obsah trojuholníka *ACD* je $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5\ cm^2$.
Obsah štvoruholníka *ABCD* potom je $3{,}75\ cm^2 + 5\ cm^2 = 8{,}75\ cm^2$.

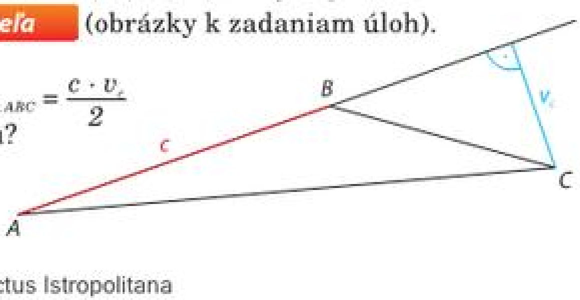


! Každý mnohouholník sa dá rozdeliť na trojuholníky a pomocou týchto trojuholníkov možno vypočítať jeho obsah.

6 Vypočítajte obsah farebných mnohouholníkov (alebo ich častí), ktoré nájdete na www.orbispictus.sk v sekcii **Pre učiteľa** (obrázky k zadaniam úloh).

7 Vypočítajte obsah štvoruholníka s vrcholmi *K*, *L*, *M*, *N*, ktorý nájdete na www.orbispictus.sk v sekcii **Pre učiteľa** (obrázky k zadaniam úloh).

8 Bude vzorec pre obsah trojuholníka $S_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot v_c}{2}$ platiť aj v prípade, ktorý je na obrázku?



Obsah lichobežníka

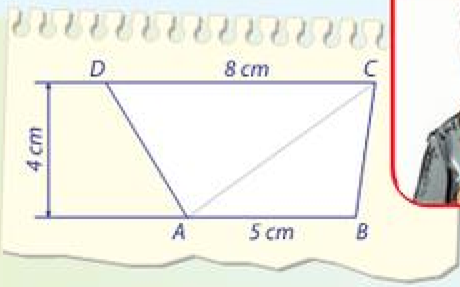
V tejto kapitole sa budeme venovať obsahu lichobežníka.

1 Narysujte do zošita jeden z mnohých lichobežníkov $ABCD$ (nesmie byť ani pravouhlý, ani rovnoramenný) so základňami AB, CD, pre ktorý platia tieto 3 podmienky: priamky AB a CD sú vzdialené 4 cm, $|AB| = 5$ cm, $|CD| = 8$ cm.
Bez toho, aby ste čokoľvek merali, vyriešte sériu troch úloh:
a) Zistite obsah lichobežníka $ABCD$ tak, že ho rozdelíte na 2 trojuholníky.
b) Zistite jeho obsah tak, že ho rozdelíte na rovnobežník a trojuholník.
c) Zistite jeho obsah tak, že ho rovnakým lichobežníkom doplníte na rovnobežník.

Asi je vám jasné, že vo všetkých troch prípadoch by vám mal vyjsť ten istý obsah, konkrétne 26 cm².

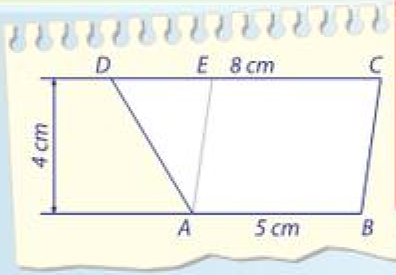
Pozrime sa spoločne na riešenie všetkých troch úloh. V každom z troch prípadov si musíme uvedomiť, čo poznáme.

Juraj:
V prípade a) si všímam trojuholníky ABC a ADC.
V trojuholníku ABC poznám $|AB| = 5$ cm a poznám aj v_{AB}. Tá sa rovná 4 cm.
Potom však viem vypočítať jeho obsah:
$5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} : 2 = 10\text{ cm}^2$.



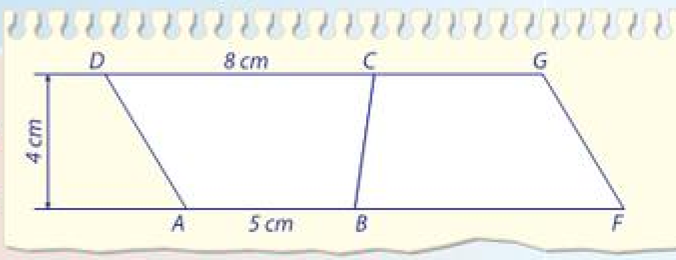
V trojuholníku ADC poznám $|CD| = 8$ cm a poznám aj v_{CD}. Tá je taká istá ako v_{AB}, čiže tiež 4 cm.
Obsah trojuholníka ADC je $8\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} : 2 = 16\text{ cm}^2$. Obsah lichobežníka $ABCD$ je preto
$10\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2 = 26\text{ cm}^2$.

Robert:
V prípade b) si všímam trojuholník AED a rovnobežník $ABCE$.
V trojuholníku AED meria strana DE $8\text{ cm} - 5\text{ cm} = 3$ cm. Jeho výška z bodu A na stranu DE je 4 cm. Takže jeho obsah je:
$3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} : 2 = 6\text{ cm}^2$.



V rovnobežníku $ABCE$ poznám základňu AB, ktorá meria 5 cm, aj výšku, ktorá je 4 cm.
Jeho obsah je $5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$. Obsah lichobežníka $ABCD$ je potom
$6\text{ cm}^2 + 20\text{ cm}^2 = 26\text{ cm}^2$.

Tereza:
V prípade c) si všímame rovnobežník $AFGD$.
V ňom poznám dĺžku strany AF. Tá je $5\text{ cm} + 8\text{ cm} = 13$ cm. Okrem toho poznám aj výšku rovnobežníka $AFGD$: 4 cm. Jeho obsah je $13\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 52\text{ cm}^2$. Tento rovnobežník sa skladá z dvoch lichobežníkov totožných s $ABCD$, preto obsah lichobežníka je $52\text{ cm}^2 : 2 = 26\text{ cm}^2$.



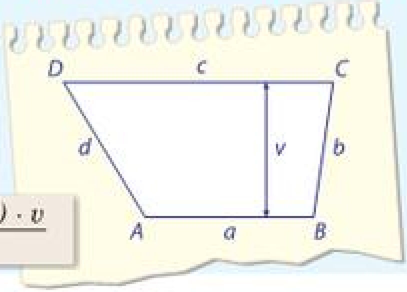
Vidíme, že vo všetkých 3 prípadoch sme pri výpočtoch použili dĺžku 4 cm, čo je vzdialenosť rovnobežiek, na ktorých ležia základne. Túto vzdialenosť budeme volať ***výška lichobežníka****.*

> ! Výška lichobežníka je vzdialenosť rovnobežných priamok, na ktorých ležia základne.

Vráťme sa k trom výpočtom obsahu lichobežníka ABCD. Všetky výpočty boli správne a viedli k správnemu výsledku. Asi najjednoduchší výpočet urobila Tereza v prípade c): sčítala dĺžky základní, tento súčet vynásobila výškou lichobežníka a výsledok vydelila číslom 2.

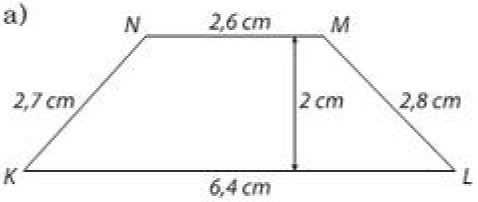
Obsah lichobežníka vypočítame tak, že sčítame dĺžky jeho základní, tento súčet vynásobíme výškou lichobežníka a výsledok vydelíme dvoma:

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

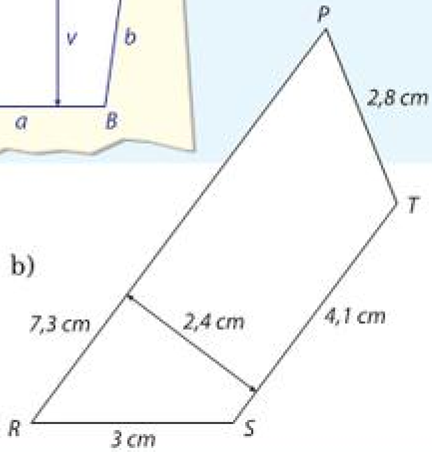


2 Vypočítajte obsah lichobežníkov na obrázku.

a)



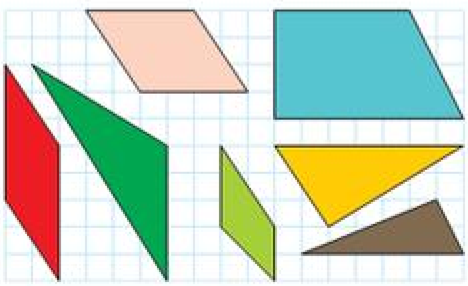
b)



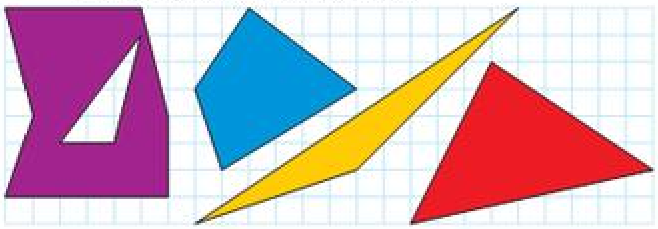
3 Vypočítajte obsahy lichobežníkov, ak poznáte dĺžky základní aj výšok.

a	6,4 cm	3,2 dm	8,5 cm	10,2 dm	2,1 cm
c	8,1 cm	6,3 dm	4,3 cm	3,8 dm	14,3 cm
v	2,7 cm	4,7 dm	2,1 cm	5,7 dm	3,8 cm

4 Precvičte si výpočet obsahov všetkých útvarov. Strana štvorčeka v štvorčekovej sieti je 1 cm.



5 Precvičte si ešte výpočet obsahov všetkých útvarov. Nezabudnite, že ak to potrebujete, každý mnohouholník môžete rozdeliť na trojuholníky. Strana štvorčeka v štvorčekovej sieti je 1 cm.



6 Riešili ste predchádzajúcu úlohu tak, že ste dané útvary dopĺňali pravouhlými trojuholníkmi na obdĺžniky? Ak nie, vyskúšajte si to.

7 Na www.orbispictus.sk v sekcii **Pre učiteľa** (obrázky k zadaniam úloh) si pozrite fotografiu katastrálnej mapy v mierke 1 : 1 000. Určte meraním a výpočtom skutočné rozmery jednotlivých očíslovaných parciel a vypočítajte ich výmery (obsahy).

VÝRAZY, VZORCE A ROVNICE I

S premennými a výrazmi sme sa okrem kapitol o výrazoch doteraz najčastejšie stretávali v geometrii v podobe vzorcov a vzťahov, napríklad vzorcov na výpočet obvodov a obsahov útvarov:

Útvar	Obvod	Obsah
Štvorec so stranou **a**	$o = 4 \cdot a$ ► $o = a + a + a + a$	$S = a \cdot a$
Obdĺžnik so stranami **a, b**	$o = 2 \cdot (a + b)$ ► $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$	$S = a \cdot b$
Trojuholník **ABC**	$o = a + b + c$	$S = a \cdot v_a : 2$ ► $S = b \cdot v_b : 2$ ► $S = c \cdot v_c : 2$
Lichobežník so základňami **a, b** a s výškou **v**		$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$ ► $S = 0{,}5 \cdot (a + c) \cdot v$

Ďalšími vzorcami boli vzorce na výpočet povrchu a objemu rôznych telies.

Teleso	Povrch	Objem
Kocka s hranou **a**	$P = 6 \cdot a \cdot a$	$V = a \cdot a \cdot a$
Kváder s hranami **a, b, c**	$P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ ► $P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$	$V = a \cdot b \cdot c$

Tieto vzorce majú výhodu v tom, že keď poznáme vstupné údaje, nemusíme si nič kresliť ani znázorňovať, stačí jednoducho dosadiť do vzorca ako do výrazu.

1 Do vzorca na výpočet obsahu obdĺžnika dosaďte a) $a = 6{,}8$ cm, $b = 11{,}5$ cm, b) $a = 3{,}5$ cm, $b = 8{,}6$ dm.

Veríme, že ste príslušný vzorec $S = a \cdot b$ našli a časť a) predchádzajúcej úlohy správne vyriešili. Niektorí z vás sa však v prípade b) asi pomýlili a zabudli, že pri dosadzovaní musíme mať údaje v rovnakých jednotkách. V časti b) ste mali buď premeniť $b = 8{,}6$ dm $= 86$ cm a až potom dosadiť: $S = 3{,}5 \cdot 86 = 301$ cm^2, alebo premeniť $a = 3{,}5$ cm $= 0{,}35$ dm a potom vypočítať $S = 0{,}35 \cdot 8{,}6 = 3{,}01$ dm^2.

2 Dosadením do vzorcov vypočítajte a) objem a povrch kocky s hranou 3,1 cm, b) objem a povrch kvádra s hranami 2,6 cm, 3 cm a 4,5 dm.

*Samozrejme, ak chcete vzorec použiť, musíte mu rozumieť. Napríklad, ak chcete použiť vzorec $S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$ na obsah lichobežníka, musíte vedieť, že **a**, **c** sú dĺžky základní lichobežníka a **v** je výška lichobežníka. Potom úlohy podobné tej nasledujúcej pre vás nebudú náročné.*

3 Vypočítajte obsah lichobežníka $KLMN$ so základňou KL, ak viete, že $|KL| = 8$ cm, $|LM| = 5$ cm, $|MN| = 4{,}6$ cm a jeho výška sa rovná 3,8 cm.

Aj vy viete, že ak KL je jedna základňa, tak druhá základňa je MN. Potom ste určite dosadili správne $S = \frac{(8 + 4{,}6) \cdot 3{,}8}{2} = 23{,}94$ cm^2. Údaj $|LM| = 5$ cm sme na výpočet obsahu lichobežníka nepotrebovali.

4 Vypočítajte obsah trojuholníka ABC a) so stranami $a = 8$ cm, $b = 11$ cm a s výškou 5 cm z vrcholu A, b) so stranou $c = 8{,}5$ m a s výškami 4,6 m z vrcholu A a 5,4 m z vrcholu C.

5 Vypočítajte obsah trojuholníka LUK so stranami $|LU| = 68$ mm, $|UK| = 94$ mm a s výškou 52 mm z vrcholu K.

6 Vypočítajte obsah rovnobežníka so stranami dlhými 8 cm, 11 cm a s výškami 5,5 cm a 4 cm.

Existuje mnoho vzorcov, ktoré sme nikdy nevideli alebo si ich nepamätáme. Nie je to nijaký problém, lebo ich možno nájsť. Ak ich však chceme použiť, musíme rozumieť symbolom – označeniam, ktoré sú v týchto vzorcoch použité.

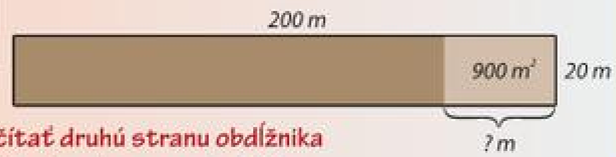
7 Nájdite (napr. na internete) vzorec na výpočet obsahu kosoštvorca pomocou dĺžky uhlopriečok. Vypočítajte obsah kosoštvorca $VODA$, ak viete, že $|VD| = 4{,}4$ dm a $|AO| = 6$ dm.

Najčastejšie používame vzorec napr. na výpočet obsahu obdĺžnika tak, že doň dosadíme známe dĺžky strán a vypočítame obsah. Možno ho však využiť aj v iných situáciách: napríklad ak poznáme obsah a hľadáme vhodné dĺžky strán.

8 Z obdĺžnikového pozemku širokého 20 metrov a dlhého 200 metrov chceme oddeliť menší pozemok rovnakej šírky s plochou 900 m². Aký dlhý bude tento menší pozemok?

Pozrite, ako si s úlohou poradila Hedviga.

Hedviga:
Nakreslím si obrázok.



Vidím, že chcem vypočítať druhú stranu obdĺžnika s obsahom 900 m², ak jedna strana meria 20 m.
Budem deliť 900 : 20 = 45. Pozemok bude dlhý 45 metrov.

9 Z obdĺžnikového poľa širokého 25 metrov a dlhého 300 m chceme oddeliť menší obdĺžnikový pozemok rovnakej šírky na pestovanie ruží. Tento pozemok sme sa rozhodli ohradiť a na to chceme použiť celé 170 m dlhé oplotenie. Aký dlhý bude oddelený pozemok?

Hedviga si opäť pomohla obrázkom.

Hedviga:
Na dve kratšie strany záhrady potrebujem 25 m + 25 m = 50 m pletiva.
Na dve dlhšie strany mi ostáva 170 m − 50 m = 120 m.
Preto jedna dlhšia strana bude merať 60 m a to je aj dĺžka pozemku.

10 Aká bude druhá strana rovnoramenného trojuholníka, ak jeho obvod je 21 cm a jedna strana meria 6 cm?

Teraz si ukážeme, ako chcela Daniela na riešenie úlohy 8 využiť vzorce.

Daniela:
Na výpočet obsahu obdĺžnika mám vzorec $S = a \cdot b$. Viem, aký má byť výsledok: $S = 900\ m^2$. Poznám aj jeden rozmer, šírku: napr. $a = 20$ m. Tieto čísla dosadím do vzorca: $900 = 20 \cdot b$. Vidím, že stačí nájsť vhodné číslo namiesto b tak, aby platilo $\mathbf{900 = 20 \cdot b}$.

K tomu, ako Daniela hľadala číslo b, sa vrátime neskôr.

11 Skúste zistiť, k akému príkladu o hľadaní neznámeho čísla by sa Daniela dopracovala, keby na riešenie úlohy 9 použila vzorec.

Ukážeme si, ako postupovala Daniela a ako ju doplnil Dominik.

Daniela:
Na výpočet obvodu obdĺžnika mám vzorec $o = 2 \cdot (a + b)$. Viem, aký má byť výsledok: $o = 170$ m a poznám aj jeden rozmer, šírku: napr. $b = 25$ m. Tieto čísla dosadím do vzorca: $170 = 2 \cdot (a + 25)$. Vidím, že namiesto a stačí nájsť vhodné číslo tak, aby platilo $\mathbf{170 = 2 \cdot (a + 25)}$.

Dominik:
Ja som ťa chcel napodobniť, ale strany som namiesto a, b označil x, y a použil som iný vzorec: $o = 2 \cdot x + 2 \cdot y$. Tiež som dosadil $o = 170$ m a $x = 25$ m. Dostal som $\mathbf{170 = 2 \cdot 25 + 2 \cdot y}$.

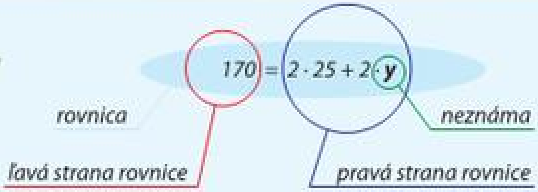
12 Rozhodnite, či to má Dominik dobre.

13 Skúste zistiť, aký príklad o hľadaní neznámeho čísla by Daniela dostala, keby na riešenie úlohy 10 použila vzorec.

Zápisy úlohy o hľadaní neznámeho čísla, ku ktorým sme sa dostali, čiže $900 = 20 \cdot b$, $170 = 2 \cdot (a + 25)$, $170 = 2 \cdot 25 + 2 \cdot y$, $21 = 6 + 6 + c$, $21 = 6 + c + c$ sa volajú ***rovnice****. V rovnici okrem čísel vystupuje písmeno – premenná alebo* ***neznáma****. My sa pokúšame nájsť jej hodnotu tak, aby rovnosť platila. Táto hodnota neznámej sa volá* ***riešenie rovnice****,* ***výsledok rovnice*** *alebo odborne* ***koreň rovnice****.*

Poznámka:
Riešením rovnice často voláme aj postup, ako ju vyriešiť, preto budeme väčšinou používať pomenovanie výsledok rovnice.

Aby sme sa ľahšie dohovorili, budeme výrazy v rovnici, ktoré sú oddelené znamienkom =, volať ľavá strana rovnice a pravá strana rovnice.



S rovnicami sa stretávate už dávno. Všetky machuľkové úlohy, kartičkové úlohy, úlohy s vynechanými číslami či otáznikmi namiesto čísel sú rovnice. Napríklad hľadať vynechané číslo v príklade $68 + ??? = 98$ je vlastne to isté, ako riešiť rovnicu $68 + s = 98$.
Takéto rovnice ste už riešili, takže teraz si naše poznatky len zhrnieme a niekedy aj trochu zjednodušíme.
Predtým, ako sa pozrieme na rovnice z tejto kapitoly, povieme si o rovniciach a ich riešení viac. Rovnice z tejto kapitoly vyriešime na stranách 121 a 122.

Gotické oblúky 2

Romana, Svetlanu a Tomáša vo formulácii „Základom konštrukcie sú dva vhodne zvolené rovnostranné trojuholníky" zaujalo slovo vhodne. Ktoré trojuholníky sú „vhodne zvolené"? Čo sa stane, ak trojuholníky nezvolíme vhodne? Rozmýšľali, čo by sa stalo s trojlístkom, keby vnútorný z dvoch základných trojuholníkov zmenšili (ako na obr. 9) alebo zväčšili (ako na obr. 10).

obr. 9

obr. 10

Zistili, že v jednom prípade by sa čiary tvoriace dva susedné lístky vôbec nespojili. V druhom prípade by sa tieto čiary síce preťali, ale nie v strede strany menšieho trojuholníka, ako je to v trojlístku z úlohy 1 na str. 43 (pozri obr. 3). Vznikol by trojlístok, ktorý by bol „tlstejší".

Úloha 1: Do obrázkov 9 a 10 dorysujte časť trojlístka tak, aby bolo vidieť, ktorá z opísaných dvoch situácií nastane, keď vnútorný trojuholník zväčšíme, a ktorá, keď ho zmenšíme. Svoje zistenia potom doplňte slovne do viet:

- Ak vnútorný trojuholník zmenšíme, ...
....
....
- Ak vnútorný trojuholník zväčšíme, ...
....
....

Obrázky 9 a 10 nájdete na www.orbispictus.sk v sekcii **Pre učiteľa**.

Rovnice na súčet a rozdiel

P*ripomeňte si najprv úlohy na súčet a rozdiel.*
Rozdelili sme ich do 3 typov: $24 + \boxed{A} = 40$ $\quad 48 - \boxed{B} = 13$ $\quad \boxed{C} - 21 = 52$

Jednotlivým typom sa teraz budeme venovať podrobnejšie.

Rovnice, kde neznáma je jeden zo sčítancov

P*rvým typom sú rovnice, v ktorých vystupuje súčet a my hľadáme hodnotu jedného zo sčítancov.*

1 Nájdite čísla pod machuľami, riešte rovnice.

a) $3 + \quad = 9$ b) $\quad + 14 = 26$ c) $46 + y = 173$
d) $z + 237 = 453$ e) $2\,453 + \quad = 11\,049$ f) $\quad + 475 = 8\,195$
g) $41\,234 + S = 100\,196$ h) $x + 2\,405 = 304\,513$

Ako ste riešili tieto úlohy? Pri malých číslach sa dá výsledok nejako dopočítať, odhadnúť. Pri veľkých číslach ste už možno počítali ako Hana.

Hana:
Ja si z príkladu na sčítanie urobím príklad na odčítanie. $\overbrace{\boxed{3}\boxed{6}}^{9}$
Lebo ak 3 + **6** = 9, tak **6** = 9 – 3.
Potom z príkladu 2 453 + = 11 049 urobím príklad = 11 049 – 2 453 = 8 596.
To isté urobím aj s rovnicou:
z rovnice x + 2 405 = 304 513 dostanem x = 304 513 – 2 405 = 302 108.

2 Riešte rovnice ako Hana.

a) $284 + a = 312$ b) $b + 2{,}3 = 8{,}1$ c) $c + 14{,}89 = 301$
d) $12{,}45 + d = 31{,}8$ e) $1\,203{,}8 + e = 4\,208{,}12$ f) $f + 235{,}2 = 42\,513$

Často potrebujeme zistiť, kedy daný výraz nadobúda nejakú hodnotu.

3 Pre ktoré číslo s nadobúda výraz $C = 47 + s$ hodnotu rovnú 103?

Hľadáme vlastne takú hodnotu čísla s, pre ktoré sa $C = 103$, teda po dosadení za C máme rovnicu $47 + s = 103$. Predpokladáme, že ste ju správne vyriešili a prišli na to, že $s = 56$.

4 a) Pre ktoré číslo s nadobúda výraz $V = 96 + s$ hodnotu 400?
b) Pre ktorú hodnotu čísla x nadobúda výraz $y = 12{,}8 + x$ hodnotu 201,7?
c) Pre ktoré z sa výraz $A = z + 23{,}8$ rovná 50?

5 Teraz riešte aj rovnice so zápornými číslami.

a) $12 + a = 8$ b) $b + 27 = -30$ c) $c + 21{,}7 = -21{,}7$

d) $-4 + d = 27$ e) $-201 + e = -356{,}2$ f) $f + (-23{,}8) = 47{,}2$

6 Nakoniec vyriešte niekoľko rovníc so zlomkami. Neznáme vypočítajte presne – uveďte ich v tvare zlomku.

a) $\frac{1}{4} + k = \frac{1}{2}$ b) $l + \frac{2}{3} = \frac{7}{11}$ c) $\frac{12}{7} + m = -\frac{13}{14}$ d) $\frac{3}{11} + n = 0{,}5$

7 Ku ktorému číslu musíme pripočítať 67, aby sme dostali –40? Pri riešení tejto úlohy postupujte podľa návodu:

- *Hľadané číslo v úlohe si označte písmenom **h**. Zapíšte vetu zo zadania pomocou rovnice s neznámou **h**.*
- *Vytvorenú rovnicu vyriešte.*
- *Sformulujte odpoveď na otázku z pôvodného slovného zadania.*

Ak ste v predchádzajúcej úlohe zostavili rovnicu $h + 67 = -40$, ktorej koreň je $h = -107$, postupovali ste správne. Odpoveď teda znie: 67 musíme pripočítať k číslu –107.

8 Rovnako ako v predchádzajúcej úlohe odpovedzte na otázky:

a) Ktoré číslo musíme pripočítať k 78, aby sme dostali 405?

b) Po pripočítaní 345 k neznámeho číslu sme dostali 200. Aké je neznáme číslo?

c) Súčet neznámeho čísla a čísla 12,7 je 8,91. Aké je neznáme číslo?

d) Ktoré číslo je o 102 menšie ako 200?

9 Keď Jana kúpi 19 známok, má 453 známok. Koľko známok mala Jana pred týmto nákupom? Najprv celú situáciu znázornite obrázkom. Potom hľadaný údaj označte nejakým písmenom. Informáciu v úlohe zapíšte v časovej následnosti pomocou rovnice. Nakoniec úlohu vyriešte.

Postupovali ste pri riešení predchádzajúcej úlohy podobne ako Peter?

Peter:

Najskôr si nakreslím obrázok: $\overbrace{\boxed{?}\boxed{19}}^{453}$

Počet známok na začiatku si označím Z.

Podľa zadania platí, že $Z + 19 = 453$. Takže $Z = 453 - 19 = 434$.

Jana mala pred nákupom 434 známok.

10 Vyriešte podobným postupom túto úlohu: Samo mal niekoľko stolnotenisových loptičiek. Po zakúpení 3 balíkov po 6 loptičiek má spolu 50 loptičiek. Koľko loptičiek mal pred nákupom?

11 Pani Jane, ktorá si šetrí peniaze v banke, pripísali úrok 238,32 €, takže teraz má v banke 10 184,56 €. Koľko mala pani Jana v banke predtým, ako jej pripísali úrok?

Rovnice, kde neznáma je menšiteľ

Druhým typom sú rovnice, v ktorých vystupuje rozdiel a my hľadáme hodnotu čísla, ktoré odčitujeme – menšiteľa.

1 Nájdite čísla, ktoré sa skrývajú pod kartičkami, riešte rovnice.
a) $24 - \boxed{W} = 13$ b) $416 - y = 143$ c) $2\,453 - \boxed{Q} = 1\,149$ d) $41\,234 - S = 23\,196$

Aj tieto úlohy ste riešili podobne ako Hana?

Hana:
Ja si z príkladu na odčítanie urobím iný príklad na odčítanie. $\overbrace{\boxed{13}\boxed{11}}^{24}$
Ak $24 - 13 = \mathbf{11}$, tak $24 - \mathbf{11} = 13$.
Z príkladu $2\,453 - \boxed{Q} = 1\,149$ urobím príklad
$\boxed{Q} = 2\,453 - 1\,149 = 1\,304$.
To isté urobím aj s rovnicou:
z rovnice $41\,234 - S = 23\,196$ dostanem $S = 41\,234 - 23\,196 = 18\,038$.

2 Riešte rovnice ako Hana.
a) $412 - a = 287$ b) $12{,}8 - b = 6{,}15$ c) $6\,738 - c = 1\,037$ d) $3\,817{,}4 - d = 2\,263{,}9$

3 a) Pre aké číslo s nadobúda výraz $C = 912 - s$ hodnotu 37?
b) Pre ktorú hodnotu čísla n nadobúda výraz $m = 709{,}3 - n$ hodnotu 300,7?
c) Pre ktoré K sa výraz $g = 78{,}037 - K$ rovná 21,67?

4 Vyskúšajte si aj riešenie rovníc so zápornými číslami a zlomkami.
a) $37 - a = -8$ b) $-41 - b = -12$ c) $18 - c = 27$ d) $-4{,}18 - d = -3{,}12$
e) $\frac{4}{5} - e = \frac{3}{2}$ f) $-\frac{1}{8} - f = \frac{5}{7}$ g) $0{,}2 - g = \frac{9}{11}$ h) $-\frac{2}{9} - h = \frac{5}{12}$

5 Ktoré číslo musíme odčítať od 78, aby sme dostali 100? Pri riešení tejto úlohy postupujte podobne ako v úlohe 7 v predchádzajúcej kapitole.

Zostavili ste v predchádzajúcej úlohe rovnicu 78 – h = 100, ktorej koreň je h = –22?

6 Rovnako ako v predchádzajúcej úlohe postupujte pri riešení týchto úloh:
a) Ktoré číslo musíme odčítať od 211, aby sme dostali 308?
b) Po odčítaní neznámeho čísla od 345 dostaneme 88. Určte neznáme číslo.
c) Zmenšením čísla 12,86 o neznáme číslo sme dostali číslo 0,47. Určte neznáme číslo.
d) Číslo 2 308 je o neznáme číslo väčšie ako 1 208. Určte neznáme číslo.

7 Milan má 2 543 hlinených guľôčok. V hre prehral a ostalo mu 2 098 guľôčok. Koľko guľôčok Milan prehral? Zostavte rovnicu a vyriešte ju.

Rovnice, kde neznáma je menšenec

T*retím typom sú rovnice, v ktorých opäť vystupuje rozdiel a my hľadáme hodnotu čísla, od ktorého odčitujeme – menšenec.*

1 Doplňte vynechané čísla, riešte rovnice.
a) $\square - 60 = 27$ b) $x - 308 = 219$ c) $\square - 1\,026 = 2\,308$ d) $z - 38\,917 = 40\,706$

2 Doplňte Hanino riešenie predchádzajúcej úlohy.

Hana

Hana:
Ja si z príkladu na .... urobím príklad na .... $\overbrace{\boxed{60}\boxed{27}}^{87}$
Lebo ak $27 + 60 = \mathbf{87}$, tak $\mathbf{87} - 60 = 27$.
Potom z príkladu $\square - 1\,026 = 2\,308$ urobím príklad
....
To isté urobím aj s rovnicou:
z rovnice $z - 38\,917 = 40\,706$ dostanem ....

3 Riešte rovnice ako Hana.
a) $a - 412 = 287$ b) $b - 12{,}8 = 6{,}15$ c) $c - 6\,738 = 1\,037$ d) $d - 3\,817{,}4 = 2\,263{,}9$

4 a) Pre ktoré číslo s nadobúda výraz $C = s - 912$ hodnotu rovnú 37?
b) Pre akú hodnotu čísla n nadobúda výraz $m = n - 709{,}3$ hodnotu 300,7?
c) Pre ktoré K sa výraz $g = K - 78{,}037$ rovná 21,67?

5 Určite zvládnete aj rovnice so zápornými číslami a zlomkami.
a) $a - 37 = -8$ b) $b - (-41) = -12$ c) $c - 18 = 27$ d) $d - (-4{,}18) = -3{,}12$
e) $e - \frac{4}{5} = \frac{3}{2}$ f) $f - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{7}$ g) $g - 0{,}2 = \frac{9}{11}$ h) $h - \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{12}$

6 Od ktorého čísla musíme odčítať 78, aby sme dostali 405?

Veríme, že v predchádzajúcej úlohe ste riešili rovnicu $h - 78 = 405$, ktorej koreň je $h = 483$.

7 Rovnako ako v predchádzajúcej úlohe vyriešte tieto príklady:
a) Od ktorého čísla musíme odčítať 4,16, aby sme dostali 32,7?
b) Po odčítaní 345 od neznámeho čísla sme dostali –8. Určte neznáme číslo.
c) Zmenšením neznámeho čísla o 38,902 sme dostali číslo 21,07. Určte neznáme číslo.
d) Od ktorého čísla je číslo 72 o 51 menšie?

8 Po tom, čo Jano daroval 19 nálepiek, zostalo mu ešte 48 nálepiek. Koľko nálepiek mal Jano pred darovaním? Zostavte rovnicu a vyriešte ju.

V nasledujúcich úlohách sme všetky tri typy rovníc na sčítanie a odčítanie pomiešali. Nepomýľte sa pri ich riešení.

9 Riešte rovnice.

a) $q - 27{,}6 = 3{,}81$ b) $27{,}6 + p = 3{,}81$ c) $r + 27{,}6 = 3{,}81$ d) $27{,}6 - s = 3{,}81$

e) $\frac{1}{4} + k = 0{,}75$ f) $\frac{1}{4} + l = 0{,}75$ g) $m - \frac{1}{4} = 0{,}75$ h) $n + \frac{1}{4} = 0{,}75$

10 Hľadané číslo si označte písmenom h. Určte hodnotu neznámej h.

a) Ktoré číslo je o 37 menšie ako 508?
b) Od ktorého čísla je číslo 560 o 238 menšie?
c) Číslo 1 067 je o neznáme číslo väčšie ako 888. Určte neznáme číslo.
d) Ktoré číslo je o 37 väčšie ako 508?
e) Od ktorého čísla je číslo 560 o 238 väčšie?

Marcelova pomôcka

Marcelovi sa nechcelo pamätať si, ktorý typ rovnice má riešiť. Napísal si všetky štyri príklady s číslami 2, 7 a 9 a pozoroval, aká zmena sa udeje, keď meníme jeden tvar na druhý.

Marcel:
Viem napísať niekoľko príkladov na sčítanie a odčítanie, ktoré vzniknú jeden z druhého:

$2 + 7 = 9$ $7 + 2 = 9$ $9 - 2 = 7$ $9 - 7 = 2$

$9 = 2 + 7$ $9 = 7 + 2$ $7 = 9 - 2$ $2 = 9 - 7$

V príkladoch pod sebou sú vždy len prehodené strany rovnice.

Marcel skúmal, ako možno opísať zmenu z tvaru

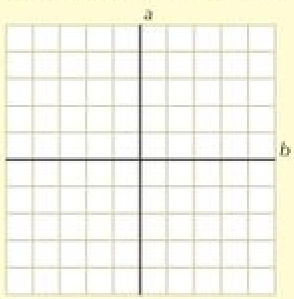
a) $2 + 7 = 9$ na tvar $2 = 9 - 7$, *b) $2 + 7 = 9$ na tvar $9 - 7 = 2$,*
c) $9 - 2 = 7$ na tvar $9 = 7 + 2$, *d) $9 - 7 = 2$ na tvar $9 = 2 + 7$,*
e) $9 - 2 = 7$ na tvar $9 - 7 = 2$.

Bádame na štvorčekovej sieti 3

Bodové ponorky

Vytvorte si sieť 10 x 10 a priamky v jej strede označte *a*, *b*. Každý hráč si zo 121 bodov mriežky zvolí 20 bodov – ponoriek. Potom hráči striedavo hádajú polohu bodov súpera – triafajú jeho ponorky. Kto uhádne, háda ešte raz. Polohu bodov môžu hráči opisovať iba pomocou priamok *a*, *b*. Vyhráva ten, kto prvý trafí 5 ponoriek súpera.

Aby ste predišli prípadným nedorozumeniam so súperom, musíte sa presne vyjadrovať aj presne zapisovať polohy, ktoré vám diktuje súper.



1 Ako by ste vy opísali zmenu v tvaroch, ktoré skúmal Marcel?

Porovnajte svoje riešenie s Marcelovým.

Marcel:
Keď sa menilo sčítanie na odčítanie, sčítanec prešiel na druhú stranu ako menšiteľ:
a) $2 + 7 = 9 \rightarrow 2 = 9 - 7$
Niekedy bolo ešte treba vymeniť obidve strany rovnice:
b) $2 + 7 = 9 \rightarrow 9 - 7 = 2$
Keď sa menilo odčítanie na sčítanie, menšiteľ prešiel na druhú stranu ako sčítanec:
c) $9 - 7 = 2 \rightarrow 9 = 2 + 7$ d) $9 - 2 = 7 \rightarrow 9 = 7 + 2$
Niekedy bolo treba urobiť viac zmien:
e) $9 - 2 = 7 \rightarrow 9 = 7 + 2 \rightarrow 9 - 7 = 2$
Takže zjednodušene si zapamätám, že sčítanie sa pri prenesení čísla na druhú stranu rovnice mení na odčítanie, a naopak. Číslo, ktoré sa na jednej strane rovnice pripočítalo, sa po prenesení na druhú stranu rovnice bude odčitovať, a naopak. Keď potrebujem, môžem obidve strany rovnice vymeniť.

2 Overte na príkladoch, že Marcelov objav platí. Aké zmeny sme urobili pri zmene tvaru:
a) $12 - 8 = 4$ na tvar $12 = 4 + 8$, b) $4 + 8 = 12$ na tvar $12 - 8 = 4$,
c) $12 - 4 = 8$ na tvar $12 = 8 + 4$, d) $12 - 4 = 8$ na tvar $12 - 8 = 4$,
e) $4 + 8 = 12$ na tvar $4 = 12 - 8$?

3 Pomocou vhodného „prenášania“ riešte rovnice.
a) $s + 45 = 29$ b) $s - 87 = 236$ c) $79 + s = 903$ d) $56 - s = 19$

Veríme, že ste si s rovnicami poradili, aj keď v časti d) bolo treba prenášať až dva razy: Keďže sa neznáma odčíta (je to menšiteľ), je lepšie najprv preniesť ju, samozrejme, ako sčítanca: $56 = 19 + s$.
Až teraz prenesieme číslo 19: $56 - 19 = s$. Takže $s = 37$.

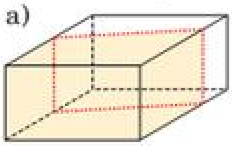
4 Vyriešte Marcelovou metódou rovnice so zlomkami, s desatinnými aj so zápornými číslami.
a) $0{,}5 + a = -1{,}8$ b) $b - 25{,}8 = -13$ c) $802{,}3 - c = 127{,}6$ d) $d + 18{,}1 = -6$
e) $e - 1{,}2 = \frac{1}{8}$ f) $f + \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ g) $-\frac{3}{4} + g = -\frac{1}{8}$ h) $\frac{3}{20} - h = 0{,}1$

5 Myslím si číslo.
a) Keď od neho odčítam 23,8, dostanem 17,2.
b) Keď ho pripočítam k 23,8, dostanem 17,2.
c) Keď k nemu pripočítam 23,8, dostanem 17,2.
d) Keď ho odčítam od 23,8, dostanem 17,2.
Ktoré číslo si myslím? Zostavte rovnicu a vyriešte ju.

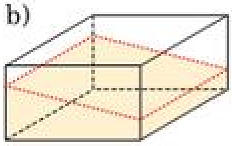
Spomínate si, čo je hranol?

1 Ktoré zo žltých telies na obrázkoch sú hranoly?

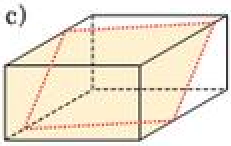
a)



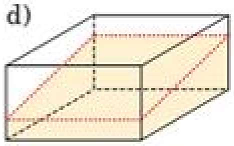
b)



c)

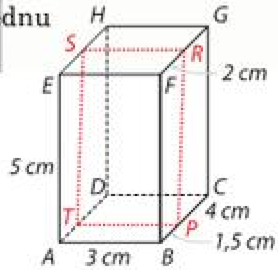


d)



2 Čo má tvar hranola, čo sú jeho podstavy?

3 Na obrázku je kváder rozdelený na dva hranoly. a) Narysujte jednu podstavu každého hranola. b) Narysujte najväčšiu bočnú stenu každého hranola.



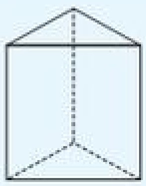
Pripomíname si

Bočné steny hranola spolu vytvárajú plášť hranola.

4 Narysujte len tú časť siete hranolov z úlohy 3, ktorá tvorí plášť týchto hranolov.

Povrch hranola

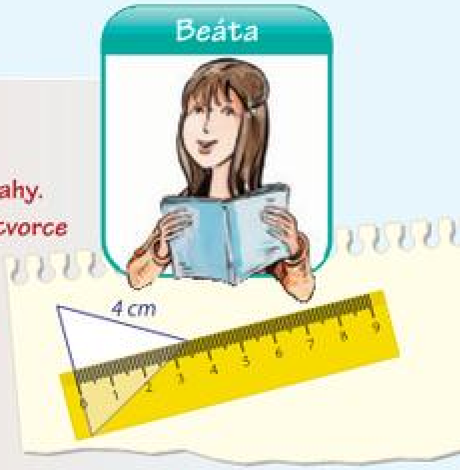
Spomínate si na škatuľku, ktorú si v 1. časti učebnice vyrábal Peter? Jeho škatuľka mala tvar pravidelného trojbokého hranola – jeho podstavy boli rovnostranné trojuholníky a bočné steny boli štvorce so stranou 4 cm.



Petrovi jeho sestra Beáta navrhla, aby škatuľku vyzdobil – vyfarbil a potom natrel špeciálnym voskom –, aby bola pevnejšia. Zaujímalo ich, koľko vosku minú. Na obale bolo napísané, že 1 malé balenie vosku stačí na 50 až 100 cm^2.

1 Pomôžte Beáte a Petrovi vypočítať, či im na natretie celej škatuľky bude stačiť 1 balenie vosku.

Vyšlo vám to rovnako ako Beáte a Petrovi?



Beáta:
To, čo budeme voskovať, sú tri rovnaké štvorce a dva rovnaké rovnostranné trojuholníky. Stačí teda, keď vypočítame ich obsahy. Pri štvorcoch to je jednoduché: $4\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} = 16\ \text{cm}^2$. Keďže štvorce sú tri, celkovo to bude $3 \cdot 16\ \text{cm}^2 = 48\ \text{cm}^2$. To sme vlastne vypočítali obsah plášťa hranola.
Zostali ešte dva rovnostranné trojuholníky. Vypočítať obsah trojuholníka viem, ak poznám stranu aj výšku. Keďže výšku nepoznám, musím si trojuholník narysovať a výšku odmerať. Vidím, že výška meria približne 3,5 cm. Obsah jedného trojuholníka teda bude približne $\frac{4 \cdot 3{,}5}{2} = 7\ \text{cm}^2$. Keďže sú dva, spolu je to približne $14\ \text{cm}^2$.
Celkovo budeme voskovať $48\ \text{cm}^2 + 14\ \text{cm}^2 = 62\ \text{cm}^2$.

Peter:
Takže ak nebudeme veľmi míňať, jedno malé balenie by nám malo stačiť. Škoda, že sme to nemohli robiť tak, ako sa to často robí v priemysle: celé teleso sa ponorí do príslušnej látky a hotovo.

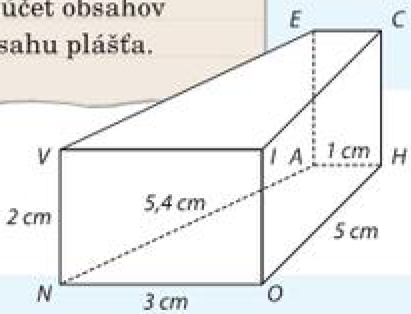
Beáta:
Peter, tým ponorením si mi pripomenul učivo zo 7. triedy. My sme vlastne vypočítali povrch hranola.

! Povrch hranola je súčet obsahov všetkých jeho stien.

Inými slovami povedané:

! Povrch hranola je súčet obsahov dvoch podstáv a obsahu plášťa.

2 Vypočítajte povrch štvorbokého hranola *NOHAVICE*, ktorý vznikol odrezaním z kvádra. Jeho rozmery vidíte na obrázku.



T*eraz sa pokúsime objaviť vzorec na výpočet povrchu hranola.*

3 Nájdite na internete vzorec na výpočet povrchu hranola.

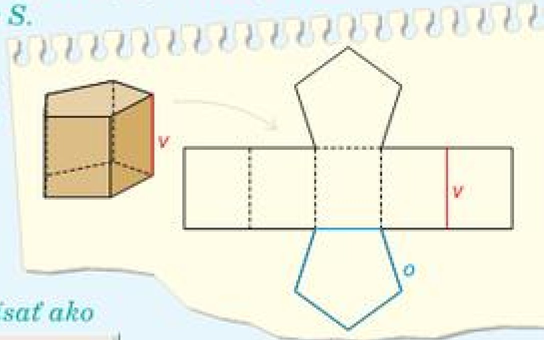
Nevieme, či ste boli úspešní vy, ale Peter a Beáta úspešní boli. Len ich prekvapilo, že každý z nich našiel iný vzorec. Neskôr zistili, že obidva sú správne.

Beáta: $P = 2 \cdot S + o \cdot v$

Peter: $P = Q + 2 \cdot S$

4 Pokúste sa prísť na to, čo sa skrýva za označeniami S, o, Q, v.

Začnime najskôr vzorcom $P = Q + 2 \cdot S$. Za písmenom S sa skrýva obsah podstavy (hranol má dve podstavy, preto je tam $2 \cdot S$). Písmeno Q zastupuje obsah plášťa. V druhom vzorci $P = 2 \cdot S + o \cdot v$ sú tiež dve podstavy S. Takže $o \cdot v$ by mal byť obsah plášťa. Ak v je výška hranola (vzdialenosť dvoch podstáv), tak o by mohol byť obvod podstavy (všimnite si, že narysovaný plášť má tvar obdĺžnika, jedna jeho strana má veľkosť v, druhá je obvod podstavy o).



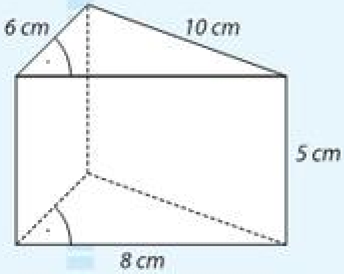
Obsah podstavy sa často označuje aj značkou S_p. Takže vzorec na výpočet povrchu plášťa môžeme zapísať ako

$P = 2 \cdot S_p + Q$ *alebo aj* $P = 2 \cdot S_p + S_{pl}$

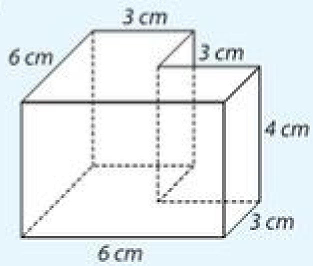
Závisí to od toho, ako si označíte obsah plášťa a ďalšie premenné.

5 Vypočítajte povrch hranolov na obrázku.

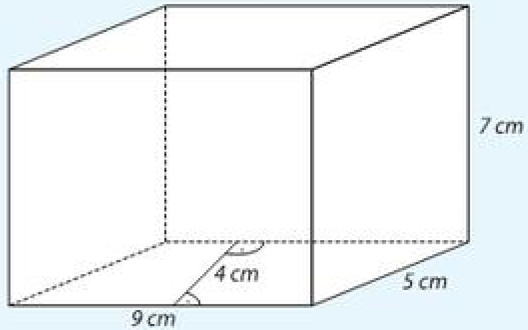
a)



b)



c)



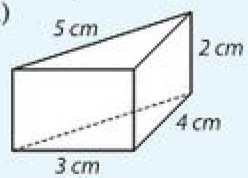
6 Vypočítaj povrch hranola, ktorého podstava a jedna bočná stena je na obrázku.

7 Vypočítajte povrch hranola so štvorcovou podstavou, ktorého plášť je obdĺžnik so stranami 18 cm a 8 cm.

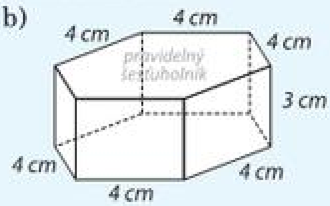
8 Nájdite aj druhú možnosť, ktorá je riešením predchádzajúcej úlohy.

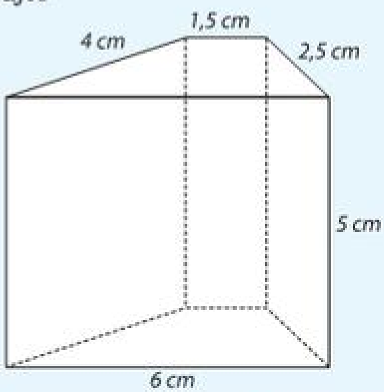
9 Vypočítajte povrch hranolov na obrázku. Ak potrebujete, rysujte a merajte rovnako ako Beáta na strane 102.

a)



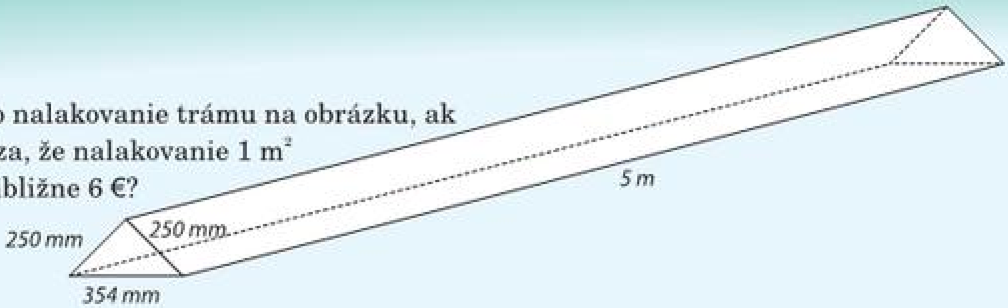
b)





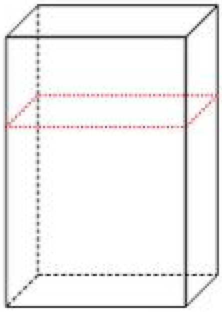
10 Poradíte si aj s výpočtom povrchu hranola na obrázku? Jeho podstava je lichobežník s výškou približne 2,2 cm.

11 Koľko by stálo nalakovanie trámu na obrázku, ak výrobca uvádza, že nalakovanie 1 m² dreva stojí približne 6 €?



12 Poznáte tesársku ceruzku? Je to väčšinou hrubá ceruzka, ktorá má tvar pravidelného šesťbokého hranola. Skúste si takú požičať, napr. od pána školníka. Koľko cm² farby je na nej? Ak sa vám ju nepodarilo získať, zistite ten istý údaj o obyčajnej ceruzke.

Objem hranola



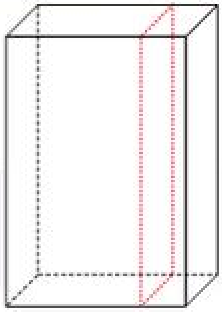
Prv než si povieme o objeme hranola, si zopakujeme, čo už o objeme vieme.

1 Na obrázku je hranol – kváder – s objemom 384 cm³ a výškou 12 cm, ktorý je rozdelený na dva hranoly s výškami 8 cm a 4 cm. Aký majú objem?

Aj vy ste si všimli to, že menší z hranolov je 3-krát nižší ako pôvodný hranol? Pôvodný hranol sa teda vlastne skladá z 3 malých hranolov. Takže objem malého hranola je 384 cm³ : 3 = 128 cm³.

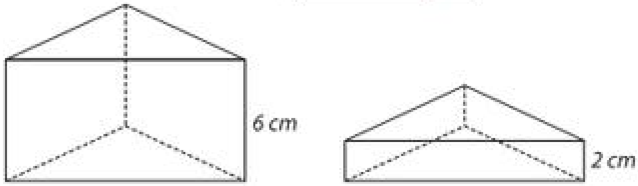
Lucia:
Koľkokrát väčšia je výška, toľkokrát väčší je objem.

2 Na obrázku je hranol – kváder – s objemom 384 cm³ a obsahom podstavy 32 cm², ktorý je rozdelený na dva hranoly s obsahmi podstáv 24 cm² a 8 cm². Aký majú objem?



Lucia:
Koľkokrát väčší je obsah podstavy, toľkokrát väčší je objem.

3 Aký objem má hranol na obrázku vľavo, ak hranol na obrázku vpravo má objem 40 cm³?



4 Ak jeden hranol má objem 60 cm³, aký objem má hranol, ktorý má a) dvakrát väčšiu výšku a päťkrát väčšiu veľkosť podstavy, b) dvakrát menšiu výšku a päťkrát menšiu veľkosť podstavy, c) dvakrát menšiu výšku a päťkrát väčšiu veľkosť podstavy, d) dvakrát väčšiu výšku a päťkrát menšiu veľkosť podstavy?

T*rám, ktorého povrch ste počítali v predchádzajúcej kapitole, potrebovali Doležalovci premiestniť. Nechceli, aby sa pri jeho zdvíhaní niekto zranil, preto sa rozhodli najprv zistiť, aký je ťažký, aby mohli odhadnúť, koľko ľudí by ho malo dvíhať. Vedeli, že trám je z dreva, od výrobcu poznali aj jeho rozmery. Na internete našli, že 1 m^3 dreva váži približne 750 kg.*

5 Čo potrebujú Doležalovci zistiť, aby vedeli určiť približnú hmotnosť trámu?

Asi ste správne prišli na to, že Doležalovci potrebujú zistiť, koľko m^3 trám „zaberá“, teda aký je jeho objem. Vzorec na výpočet objemu si však nikto z rodiny nepamätal. Našťastie mali internet.

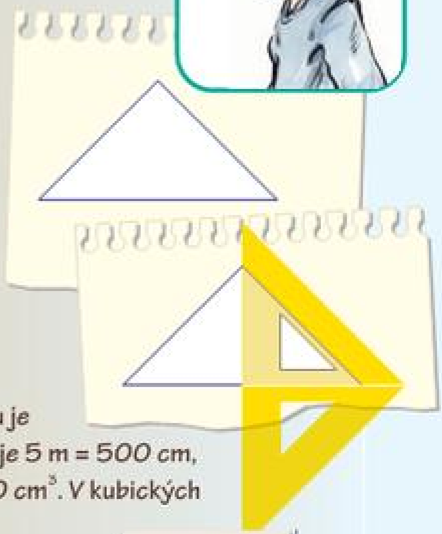
6 Nájdite na internete vzorec na výpočet objemu hranola. Ak sa vám to nepodarí v slovenčine, pomôžte si prekladom a nájdite vzorec v inom jazyku.

Veríme, že pri hľadaní ste boli úspešní a našli ste vzorec na výpočet objemu hranola $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v je vzdialenosť dvoch podstáv – výška hranola.

7 Pomocou vzorca na výpočet objemu hranola pomôžte Doležalovcom určiť hmotnosť dreveného trámu.

Peter:
Výška hranola je vzdialenosť podstáv. V našom prípade je to 5 metrov. Podstavy sú trojuholníky. Poznám síce ich strany, ale nepoznám ani jednu výšku, preto si musím trojuholník narysovať. Jeho rozmery sú však veľké, do zošita by sa mi nezmestil. Narysujem si ho teda zmenšený – so stranami 25 mm, 25 mm a 35,4 mm.

Ten trojuholník vyzerá, že je pravouhlý. Ak je to tak, jeho obsah vypočítam ľahko.



Áno, vyšiel približne pravouhlý. Takže obsah podstavy trámu je približne 25 cm · 25 cm : 2 = 312,5 cm^2. Keďže jeho výška je 5 m = 500 cm, tak jeho objem je približne 312,5 cm^2 · 500 cm = 156 250 cm^3. V kubických metroch je to 0,156 25 m^3. Jeho hmotnosť je približne 0,156 25 · 750 = 117 kg. Trám by teda mali niesť asi 4 ľudia.

$V = S \cdot v$

8 Vypočítajte objem Petrovej ozdobnej škatuľky z predchádzajúcej kapitoly.

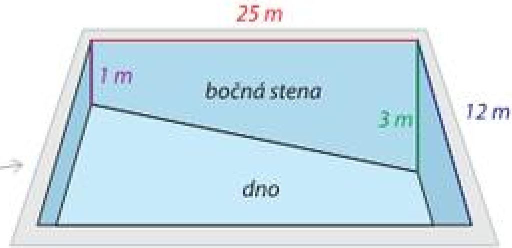
9 Vypočítajte objem hranola *NOHAVICE* z predchádzajúcej kapitoly.

10 Vypočítajte objem trojbokého hranola a pravidelného šesťbokého hranola z úlohy 9 z predchádzajúcej kapitoly.

11 Vypočítajte objem hranola z úlohy 10 z predchádzajúcej kapitoly.

12 Vypočítajte objem hranolov z úloh 5, 6 a 7 z predchádzajúcej kapitoly.

13 Bazén na obrázku chceme naplniť vodou. Ako dlho to bude trvať, ak každú minútu pritečie 5 000 litrov vody?



14 Do vázy tvaru pravidelného šesťbokého hranola sa zmestí 1,2 litra vody. Aká je výška vázy, ak jej dno má vnútorný obsah 40 cm² a hrúbka skla je 8 mm?

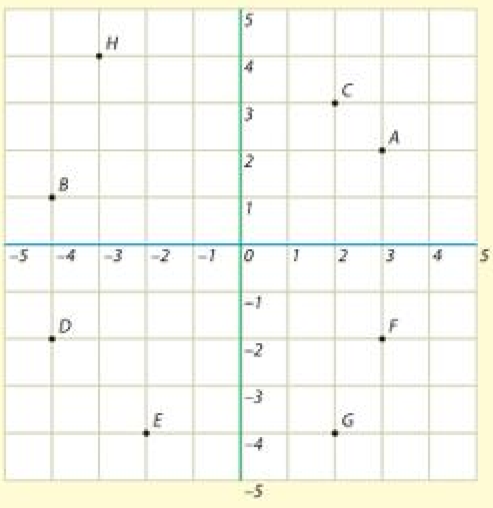
15 Vypočítajte povrch pravidelného šesťbokého hranola s výškou 6 cm. Hrana podstavy meria 4 cm. Podstavu hranola si narysujte v skutočnej veľkosti.

16 Vypočítajte objem hranola z úlohy 15.

17 Ako by sa zmenil a) povrch, b) objem hranola z úlohy 15, ak by sme každý jeho rozmer zdvojnásobili?

Bádame na štvorčekovej sieti 4

Na obrázku je štvorčeková mriežka, strana štvorčeka meria 1 cm. Niektoré body mriežky sú zvýraznené.
Váš priateľ má rovnakú mriežku, len bez vyznačených bodov *A* až *H*.



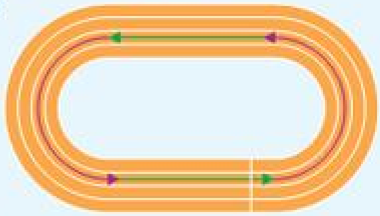
Úloha 1: a) Predstavte si, že mu máte cez telefón opísať polohu bodu *A*. Urobte to.
b) Opíšte mu postupne aj polohy bodov *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*.

Úloha 2: Michal opísal polohu bodu *A* ako 3; 2 a polohu bodu *B* ako –4; 1. Pokúste sa vysvetliť jeho zápis. Potom Michalovým spôsobom opíšte ostatné body.

KRUŽNICA A KRUH II 13

Dĺžka kružnice a obvod kruhu

V minulých ročníkoch sme sa venovali výpočtu obvodov rôznych útvarov (štvorec, obdĺžnik, trojuholník...). S týmito útvarmi sa stretávame aj v bežnom živote (obvod záhrady, dĺžka lana...). Existujú však i útvary, ktoré nie sú hranaté. Najjednoduchším z nich je kružnica. Je preto užitočné vedieť, ako sa vypočíta dĺžka celej kružnice alebo jej časti. Je to vlastne to isté ako obvod kruhu, ktorý je touto kružnicou ohraničený.

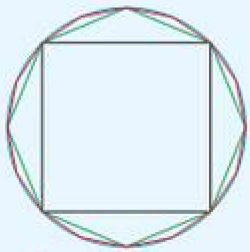


Prv než vám povieme, ako možno vypočítať dĺžku kružnice, budeme trochu počítať a experimentovať.

1 Sú dané tri kružnice s polomermi 1 cm, 2 cm a 3 cm. Ktorá z nich má podľa vás najmenšiu a ktorá najväčšiu dĺžku?

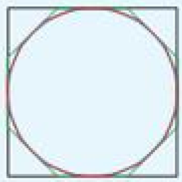
Predpokladáme, že ste správne prišli na to, že najmenšiu dĺžku má kružnica s polomerom 1 cm a najväčšiu dĺžku kružnica s polomerom 3 cm. Zdá sa, že čím väčší je polomer, tým väčšia je dĺžka kružnice, a naopak. Poďme spoločne zistiť, či a ako dĺžka kružnice súvisí s jej polomerom. Konkrétne budeme skúmať, ako sa mení ***pomer medzi dĺžkou kružnice a jej polomerom, resp. priemerom****.*

2 Do modrej kružnice je vpísaný čierny štvorec, zelený pravidelný osemuholník a červený pravidelný šestnásťuholník. Bez merania usporiadajte ich obvody od najmenšieho po najväčší a porovnajte ich s obvodom kružnice. Svoje riešenie vysvetlite.



Asi ste si všimli, že obvod osemuholníka je väčší ako obvod štvorca a obvod šestnásťuholníka je zasa väčší ako obvod osemuholníka. Obvod šestnásťuholníka je už takmer rovnaký ako dĺžka kružnice.

3 Modrej kružnici je opísaný čierny štvorec, zelený pravidelný osemuholník a červený pravidelný šestnásťuholník. Pomocou merania usporiadajte ich obvody od najmenšieho po najväčší a porovnajte ich s obvodom kružnice.



Ani teraz asi nebolo ťažké odpovedať správne: najväčší obvod má opísaný štvorec, najmenší obvod, ktorý je najviac podobný dĺžke kružnice, má pravidelný šestnásťuholník.

4 Vyriešte podobné dve úlohy pre rovnostranný trojuholník, pravidelný šesťuholník a pravidelný dvanásťuholník.

Vyzerá to tak, že ak chceme určiť dĺžku kružnice čo najpresnejšie, bude najlepšie rysovať mnohouholník s čo najväčším počtom vrcholov s čo najmenšími stranami. Aby sa nám dobre rysovalo, zvolíme pravidelné mnohouholníky.
Čím väčší bude počet vrcholov, tým viac sa hodnoty obvodov vpísaného a opísaného mnohouholníka budú približovať k dĺžke kružnice.

Začneme štvorcom.

Experiment 1

Zostrojte ľubovoľnú kružnicu. Potom narysujte dva štvorce. Jeden vnútri kružnice tak, aby jeho vrcholy ležali na kružnici (vpísaný). Druhý tak, aby všetky priamky, na ktorých ležia strany štvorca, boli dotyčnicami kružnice (opísaný).
Potom odmerajte priemer kružnice (d) a pomocou merania zistite obvody štvorcov (o_1 a o_2). Obvod štvorca vydeľte priemerom. Nezabudnite, že nás zaujíma pomer medzi dĺžkou kružnice a jej priemerom, preto obvody delíme priemerom kružnice.
Tento postup zopakujte s ďalšími 3 kružnicami.

Vypracujte a vyplňte podobnú tabuľku.

d	o_1	o_2	$\frac{o_1}{d}$	$\frac{o_2}{d}$

Keď máte tabuľku vyplnenú, porovnajte ju s tabuľkami ostatných skupín. Vyhodnoťte svoje pozorovania.

Experiment 2

Urobte to isté ako v experimente 1, len pracujte s pravidelnými šesťuholníkmi.

Ako sme už spomenuli, vpisovaním a opisovaním mnohouholníkov s čoraz väčším počtom strán by sa nám odhady z tabuliek spresňovali. Rysovanie a meranie by však bolo čoraz náročnejšie. Napríklad pre pravidelný 20-uholník by sme dostali hodnoty medzi 3,1 a 3,3.

Experiment 3

Zoberte si pripravenú fľašu, konzervu, pohár, veľkú mincu... a odmerajte jej priemer. Potom pomocou nite alebo špagáta odmerajte dĺžku príslušnej kružnice. Vypočítajte podiel dĺžky kružnice a jej priemeru a výsledky zapíšte do tabuľky.

dĺžka – **o**	
priemer – **d**	
podiel	

Celý postup zopakujte s rozličnými okrúhlymi predmetmi.
Ako vám to vyšlo? Ako to vyšlo vašim spolužiakom? Diskutujte a vyhodnoťte svoje pozorovania.

Podobné experimenty robili ľudia aj v minulosti. Postupne spresňovali hodnotu podielu dĺžky kružnice a jej priemeru. Kedysi sa ako podiel dĺžky kružnice a jej priemeru používalo číslo 3, čo nebolo veľmi presné. Napríklad roku 1700 pred n. l. používali ľudia hodnotu tohto podielu približne 3,16.

V súčasnosti už vieme, že hľadaný podiel $\frac{o}{d}$ je číslo, konštanta, ktorú v desatinnom tvare nemožno presne zapísať. My budeme používať jej zaokrúhlenú hodnotu na stotiny, ktorá je 3,14. Keďže je to dôležitá konštanta, dostala svoje pomenovanie – Ludolfovo číslo – aj značku – grécke písmeno π. Môžeme teda zapísať, že $\pi \doteq 3{,}14$. Svoje pomenovanie dostala podľa nemecko-holandského matematika Ludolfa van Ceulena, ktorý žil v rokoch 1540 až 1610.

Ludolf van Ceulen spresňovaniu hodnoty konštanty π venoval veľa času a podarilo sa mu určiť jeho hodnotu až na 35 desatinných miest: 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88...
Ak niektoré dané údaje majú tvar zlomku, môže byť výhodné namiesto približného vyjadrenia 3,14 počítať s iným približným vyjadrením v tvare zlomku: $\pi \doteq \frac{22}{7} \doteq 3{,}14$. Existujú aj ďalšie približné vyjadrenia čísla π. Jedným z nich je napr. vyjadrenie matematika Ču Džungdžiho: $\frac{355}{113}$, ktoré sa ľahko pamätá(113355) a je presné až na 6 desatinných miest.

Nám bude stačiť, ak si zapamätáme, že podiel obvodu kruhu (dĺžky kružnice) a príslušného priemeru je číslo π, ktorého približná hodnota je 3,14.

$$\frac{o}{d} = \pi \doteq 3{,}14$$

5 Nájdite viac informácií o čísle π, prípadne o Ludolfovi van Ceulenovi. Uvedené informácie spracujte formou posteru alebo projektu.

Ak chceme vypočítať dĺžku kružnice a poznáme jej priemer, stačí ho vynásobiť číslom π.

! Dĺžka kružnice s priemerom d: $o = \pi \cdot d \doteq 3{,}14 \cdot d$

Podobne

! Obvod kruhu s priemerom d: $o = \pi \cdot d \doteq 3{,}14 \cdot d$

Keďže priemer d kružnice je dvojnásobný v porovnaní s polomerom r ($d = 2 \cdot r$), môžeme si tento vzťah pamätať aj v tvare:

! Dĺžka kružnice s polomerom r: $o = 2 \cdot \pi \cdot r \doteq 6{,}28 \cdot r$

Podobne

! Obvod kruhu s polomerom r: $o = 2 \cdot \pi \cdot r \doteq 6{,}28 \cdot r$

6 Vypočítajte dĺžku kružnice a) s polomerom 4 cm, b) s polomerom 6 cm, c) s priemerom 4 cm, d) s priemerom 6 cm. Výsledok uveďte v presnom tvare aj vyčíslený s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

7 Vypočítajte obvod kruhu a) s polomerom 3 cm, b) s polomerom 5 cm, c) s priemerom 3 cm, d) s priemerom 5 cm. Výsledok uveďte v presnom tvare aj vyčíslený s $\pi \doteq 3{,}14$.

8 Určte polomer kružnice, ktorej dĺžka je a) 21,98 cm, b) 13,816 dm, c) 21,352 mm. Počítajte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

9 Vypočítajte obvod kruhu, ktorého polomer je a) $\frac{1}{2}$ m, b) $\frac{2}{3}$ m. Počítajte s hodnotou $\pi \doteq \frac{22}{7}$. Výsledok uveďte v tvare zlomku v základnom tvare aj v tvare desatinného čísla zaokrúhleného na dve desatinné miesta.

10 Vypočítajte obvod a) 2-eurovej, b) 1-eurovej mince. Rozmery zistite na internete.

11 Vypočítajte dĺžku a) polkružnice, b) štvrťkružnice s polomerom 5 cm. Počítajte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

Bolo to pre vás rovnako jednoduché ako pre Fera?

Fero:

Najskôr vypočítam dĺžku celej kružnice:

$o = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 5\ \text{cm} = 10 \cdot \pi\ \text{cm} \doteq 31{,}4\ \text{cm}.$

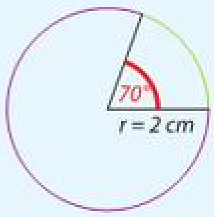
Polkružnica bude mať polovičnú dĺžku, čiže:

$31{,}4\ \text{cm} : 2 = 15{,}7\ \text{cm}.$

Štvrťkružnica bude mať štvrtinovú dĺžku, teda:

$31{,}4\ \text{cm} : 4 = 7{,}85\ \text{cm}.$

12 Na obrázku je kružnica rozdelená na 2 časti. Vypočítajte dĺžku obidvoch farebne vyznačených oblúkov. Počítajte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.



Pozrite, ako si s touto úlohou poradil Fero.

Fero:

Vypočítať dĺžku celej kružnice je ľahké:

$o = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 2\ \text{cm} = 4 \cdot \pi\ \text{cm} \doteq 12{,}56\ \text{cm}.$

Táto dĺžka zodpovedá celej kružnici, čiže uhlu 360°. Oblúk, ktorý zodpovedá uhlu 70°, bude mať menšiu dĺžku. Použijem priamu úmernosť:

360° ..... 12,56 cm

70° .... x cm

Takže $\frac{x}{12{,}56} = \frac{70}{360}$, čiže $x = 12{,}56 \cdot \frac{70}{360}\ \text{cm} \doteq 2{,}44\ \text{cm}.$

13 Dĺžka druhého oblúka sa dá vypočítať odčítaním aj priamou úmernosťou. Vypočítajte ju oboma spôsobmi.

Keby sme Ferov postup zovšeobecnili na oblúk kružnice s polomerom r, ktorý zodpovedá uhlu s veľkosťou α, dostali by sme takúto trojčlenku:

$360°$ .... $2 \cdot \pi \cdot r$

α .... x cm

Takže $\dfrac{x}{2 \cdot \pi \cdot r} = \dfrac{\alpha}{360°}$, čiže $x = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$. To je vzorec na výpočet dĺžky oblúka kružnice s polomerom r, ktorý zodpovedá uhlu α.

! Dĺžka oblúka: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$

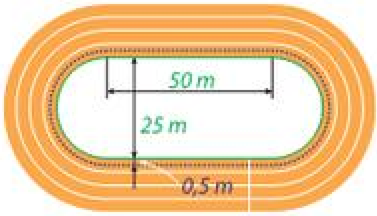
14 Určte dĺžku oblúka kružnice s polomerom r = 10 cm, ktorý zodpovedá uhlu a) 180°, b) 90°, c) 36°, d) 19°, e) 341°. Počítajte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

15 Detské ihrisko má bežeckú dráhu, ktorá sa skladá z dvoch priamych úsekov a dvoch polkružníc. Rozmery merané pri vnútornom okraji dráhy vidíte na obrázku.

a) Vypočítajte dĺžku tejto bežeckej dráhy.

b) O koľko metrov viac by zabehol pretekár, ktorý by nebežal pri vnútornom okraji dráhy, ale 0,5 metra od tohto okraja?

Počítajte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.



16 Keď si chcete správne nastaviť cyklistický tachometer – cyklopočítač, musíte pri niektorých prístrojoch zadať obvod kolesa bicykla. Jeho hodnotu môžete nájsť v rôznych tabuľkách, alebo si ju môžete vypočítať. Na kolese nájdete jeho priemer v milimetroch alebo v palcoch. Ide o prvé z dvojice čísel napísaných na kolese, napr. zápis 700 x 20C znamená priemer 700 milimetrov, zápis 26 x 1.40 zodpovedá priemeru 26 palcov. Ak viete, že 1 palec je 25,4 mm, vypočítajte s presnosťou na centimetre obvody kolies s označením a) 700 x 20C, b) 650 x 35A, c) 26 x 1.25, d) 26 x 2.00, e) 27 x 1 1/4. Počítajte na kalkulačke.

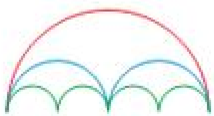
Experiment 4 Ak chcete zistiť obvod kolesa bez tabuliek, môžete použiť aj tento návod z internetu:

„Nastavíme predné koleso tak, aby ventil bol kolmo k podlahe. Zaťažíme koleso tak, že trošku zatlačíme na riadidlá. Prejdeme kolesom po priamke, kým ventil znova nebude kolmo k podlahe. Môžeme spraviť aj viac takýchto pretočení, v tom prípade odmeranú vzdialenosť vydelíme počtom pretočení. Meranie aspoň dva krát opakujeme a spravíme jednoduchý aritmetický priemer."

(zdroj: http://blog-maro.blogspot.com/2008/01/cyklopocitac-nastavenie-obvodu-kolesa.html)

Ak máte doma bicykel, urobte tento experiment. Porovnajte výsledok experimentu s výsledkom, ktorý získate výpočtom s údajmi na kolese.

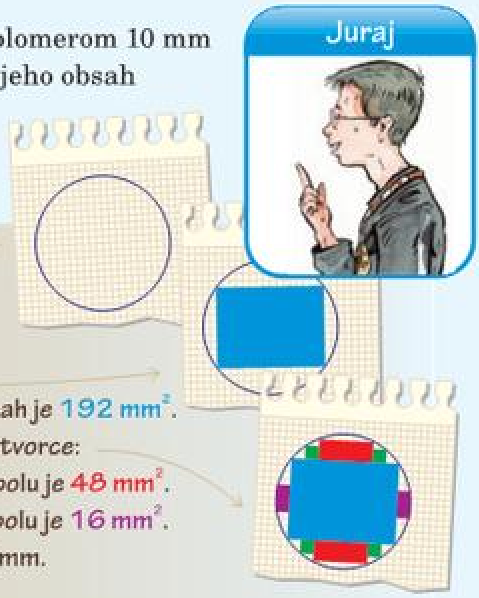
17 Na obrázku sú tri cesty vytvorené z polkružníc: červená, modrá a zelená cesta. Ktorá cesta je najdlhšia?



Obsah kruhu

Aj pri objavovaní spôsobu, ako vypočítať obsah kruhu, budeme najskôr trochu experimentovať.

Experiment 1 Narysujte na milimetrový papier kruh s polomerom 10 mm a skúste čo najpresnejšie vypočítať, aký je jeho obsah v milimetroch štvorcových.



Juraj pri riešení predchádzajúcej úlohy postupoval takto:

Juraj:
Najskôr si narysujem kruh s polomerom 10 mm.
Potom v ňom skúsim vyznačiť čo najväčší obdĺžnik, ktorého obsah viem vypočítať:
Tento obdĺžnik má strany 12 mm a 16 mm a jeho obsah je $192\ mm^2$.
Vo zvyšných častiach nájdem ďalšie obdĺžniky alebo štvorce:
Dva červené majú rozmery 3 mm a 8 mm. Ich obsah spolu je $48\ mm^2$.
Dva fialové majú rozmery 2 mm a 4 mm a ich obsah spolu je $16\ mm^2$.
Na obrázku mám ešte 4 zelené štvorce so stranou 2 mm.
Ich obsah spolu je $16\ mm^2$.
Teraz už len spočítam zvyšné milimetrové štvorčeky. Pri takých, ktoré nie sú v kruhu celé, sa budem musieť rozhodnúť, či ich započítam, alebo nie. Pri mojom približnom výpočte mi vyšlo, že v kruhu je ešte asi **40 milimetrových štvorčekov**.
Celkový približný obsah mi vyšiel

$$192\ mm^2 + 48\ mm^2 + 16\ mm^2 + 16\ mm^2 + 40\ mm^2 = 312\ mm^2.$$

Vyšlo mi teda, že obsah kruhu s polomerom 10 mm je približne $312\ mm^2$. Obsah bude asi o trochu väčší, lebo niektoré štvorčeky, ktoré neboli v kruhu celé, som nezapočítal.

Experiment 2 Zopakujte experiment 1, tentoraz s polomerom a) 20 mm, b) 40 mm, c) 80 mm. Aké vám vyšli obsahy? Porovnajte si ich s inými skupinami.

Experiment 3 Narysujte na milimetrový papier kruh s polomerom a) 10 mm, b) 20 mm, c) 40 mm, d) 80 mm a skúste čo najpresnejšie zistiť, koľko celých malých štvorčekov stačí na zakrytie kruhu.

Aj takto kedysi ľudia zisťovali obsah kruhu (aj iných krivočiarych útvarov). Hoci ich výsledky boli iba približné, pre praktické účely postačovali.
Prezradíme vám, že správne a presné obsahy kruhov z oboch experimentov (po zaokrúhlení na 2 desatinné miesta) sú $314{,}16\ mm^2$, $1\,256{,}64\ mm^2$, $5\,026{,}55\ mm^2$ a $20\,106{,}19\ mm^2$.
Odkiaľ to vieme? Na výpočet obsahu kruhu existuje vzorec podobne ako na výpočet jeho obvodu. Tento vzorec je veľmi jednoduchý a tiež súvisí s Ludolfovým číslom.

! Obsah kruhu s polomerom r: $S = \pi \cdot r \cdot r$

1 Skontrolujte výpočtom, či sme obsah kruhov vypočítali s presnosťou na 2 desatinné miesta správne. Výsledky porovnajte so svojimi odhadmi. Pri výpočte použite hodnotu $\pi \doteq 3{,}14$.

Vyšli vám výsledky mierne odlišné od našich?

2 Premyslite si, prečo sa výsledky odlišujú.

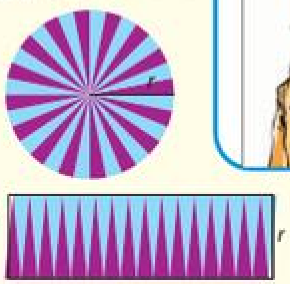
Asi ste prišli na to, že my sme pri výpočte používali presnejšiu hodnotu ako 3,14, a preto sú naše výsledky presnejšie. Odchýlka sa postupne zväčšuje, lebo pri vašom výpočte počítate v prípade najväčšieho kruhu: $3{,}14 \cdot 80 \cdot 80$ a my sme počítali $3{,}141\,592\,65 \cdot 80 \cdot 80$. Keďže $80 \cdot 80 = 6\,400$, tak aj rozdiel na mieste tisícin, desaťtisícin... hrá dôležitú úlohu, lebo ho vynásobíme číslom 6 400. Preto rozdiel medzi naším a vaším výsledkom bol $20\,106{,}19\ mm^2 - 20\,096\ mm^2 = 10{,}19\ mm^2$. Aj na to treba myslieť pri výpočtoch obvodov a obsahov.

Poznámka:
Príliš skorým zaokrúhlením (napríklad počítaním s číslom 3,14) nedostanete úplne presné výsledky. Na bežné výpočty sú však zväčša dostatočne presné.

Na väčšine kalkulačiek môžete nájsť presnejšiu hodnotu čísla π. Zväčša je tam priamo tlačidlo s označením $\boxed{\pi}$.

Vráťme sa k vzorcu na výpočet obsahu kruhu. Poďme sa pozrieť, ako si tento vzorec pripomína Jana. Pre niektorých z vás toto zdôvodnenie môže byť aj pomôckou na zapamätanie si jedného či druhého vzorca.

Jana:
Ja si kruh s polomerom *r* predstavím ako pizzu rozdelenú na 32 rovnakých častí.
Jeho obvod je $2 \cdot \pi \cdot r$. Keď si jednotlivé kúsky pizze naukladám inak, dostanem „skoro obdĺžnik“:
Keby bolo kúskov ešte viac, dostávala by som čoraz presnejší obdĺžnik.
Dĺžka vodorovnej strany sa približne rovná polovici obvodu kruhu, teda $\pi \cdot r$, pretože ju tvorí presne polovica oblúkov pôvodného kruhu. Veľkosť zvislej strany sa približne rovná polomeru kruhu *r*.
Obsah obdĺžnika je potom ich súčin: $S = \pi \cdot r \cdot r$.
Takže vyšlo, že ak kruh má obvod $2 \cdot \pi \cdot r$, jeho obsah je $\pi \cdot r \cdot r$.



Ak neuvedieme inak, vo všetkých nasledujúcich úlohách počítajte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

3 Vypočítajte obsah kruhu s polomerom a) 1,5 cm, b) 3 cm, c) 6 cm, d) 12 cm.

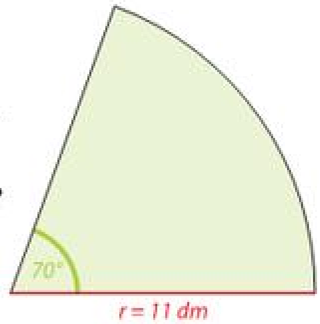
4 Vypočítajte obsah kruhov z predchádzajúcej úlohy, ale počítajte s presnejšou – kalkulačkovou – hodnotou π. O koľko sa odlišujú tieto výsledky od výsledkov predchádzajúcej úlohy?

5 Obvod kruhu je 15,7 dm. Vypočítajte jeho obsah.

6 Aký obsah má podložka pod pizzu, ktorej priemer je 42 cm?

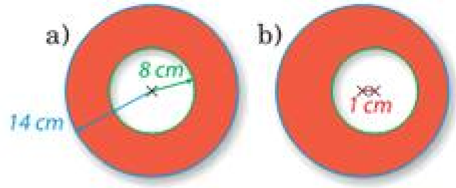
7 Aký obsah má a) polkruh, b) štvrťkruh s polomerom 12 cm?

8 Aký je obsah tzv. kruhového výseku na obrázku, ktorý zodpovedá uhlu 70°, ak polomer kruhu je 11 dm?



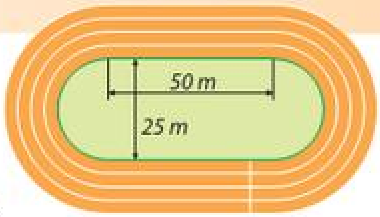
9 Odvoďte podobne ako pri dĺžke oblúka kružnice vzorec na výpočet obsahu kruhového výseku, ktorý prislúcha uhlu α. Polomer kruhu je r.

10 Vypočítajte obsah červeného útvaru na obrázku. Kruhy majú polomery 8 cm a 14 cm, pritom a) majú spoločný stred, b) vzdialenosť stredov je 1 cm.

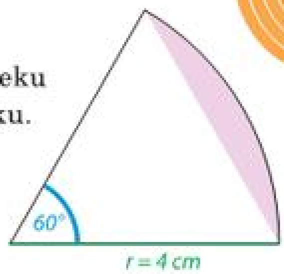


Poznámka:
*Útvar na obrázku a), ktorý je ohraničený veľkým a malým kruhom so spoločným stredom, sa nazýva **medzikružie**.*

11 Vráťme sa k detskému ihrisku. Obec sa vnútri ihriska rozhodla vysadiť trávu. Vypočítajte, aký je obsah tejto trávnatej plochy.



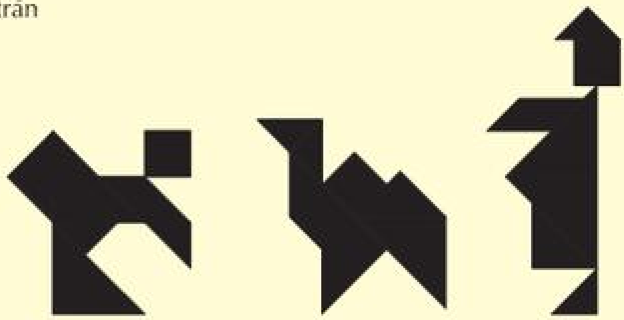
12 Meraním a výpočtom zistite obsah odseku na obrázku. Pomôžte si obsahom výseku.



Tangram 3

Spomínate si na hlavolam tangram zo strán 33 a 44?

Úloha 1: Zložte z pripravených dielov tangramu obrázky:



Okrem rovníc na súčet a rozdiel sa môžeme stretnúť aj s rovnicami na súčin a podiel.

Rovnice na súčin a podiel

Podobne ako pri rovniciach na súčet a rozdiel, pripomeňte si najprv úlohy na súčin a podiel. Rozdelili sme ich na 3 typy: $5 \cdot \boxed{A} = 35$ $60 : \boxed{B} = 12$ $\boxed{C} : 8 = 11$

Jednotlivým typom sa teraz budeme venovať podrobnejšie.

Rovnice, kde neznáma je jeden z činiteľov

Prvým typom sú rovnice, v ktorých vystupuje súčin a my hľadáme hodnotu jedného z činiteľov.

1 Nájdite čísla pod machuľami, riešte rovnice.

a) $3 \cdot$ $= 18$ b) $\cdot\ 11 = 44$ c) $21 \cdot y = 84$
d) $z \cdot 3 = 96$ e) $35 \cdot$ $= 385$ f) $\cdot\ 12 = 492$
g) $212 \cdot S = 2\,968$ h) $x \cdot 3\,082 = 311\,282$

Ako ste si poradili s týmito úlohami? Počítali ste ako Hana?

Hana

Hana:
Ja si z príkladu na násobenie urobím príklad na delenie.
Lebo ak $3 \cdot 6 = 18$, tak $6 = 18 : 3$.
Potom z príkladu $35 \cdot$ $= 385$ urobím príklad: $= 385 : 35 = 11$.
To isté urobím aj s rovnicou:
z rovnice $x \cdot 3\,082 = 311\,282$ dostanem $x = 311\,282 : 3\,082 = 101$.

2 Riešte rovnice ako Hana.

a) $1{,}7 \cdot a = 3{,}4$ b) $b \cdot 3 = 5{,}4$ c) $c \cdot 1{,}2 = 4{,}8$
d) $3 \cdot d = 18{,}03$ e) $21{,}04 \cdot e = 134{,}656$ f) $f \cdot 412{,}8 = 5\,106{,}336$

Podobne to bude aj s výrazmi.

3 Pre ktoré číslo s nadobúda výraz $C = 17 \cdot s$ hodnotu rovnú 102?

Hľadáme takú hodnotu čísla s, pre ktorú sa $C = 102$, teda po dosadení za C dostaneme rovnicu $17 \cdot s = 102$. Jej riešením je $s = 6$.

4 a) Pre ktoré číslo s nadobúda výraz $V = 3{,}5 \cdot s$ hodnotu 80,5?
b) Pre ktorú hodnotu čísla x nadobúda výraz $y = 0{,}02 \cdot x$ hodnotu 0,000 8?
c) Pre ktoré z sa výraz $A = z \cdot 1\,600$ rovná 1?

5 Teraz riešte aj rovnice so zápornými číslami.
a) $16 \cdot a = -8$ b) $b \cdot (-5) = -30$ c) $c \cdot (-21{,}7) = 21{,}7$
d) $-4 \cdot d = -28$ e) $-16{,}2 \cdot e = -8{,}1$ f) $f \cdot 32{,}4 = -4{,}05$

6 Nakoniec vyriešte zopár rovníc so zlomkami. Spomeňte si, ako sa delí zlomok zlomkom.
a) $\frac{1}{4} \cdot k = \frac{1}{2}$ b) $l \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{12}{7} \cdot m = -\frac{9}{14}$ d) $\frac{3}{11} \cdot n = 0{,}5$

7 Ktoré číslo musíme vynásobiť číslom 3,6, aby sme dostali –39,6? Pri riešení tejto úlohy postupujte takto:
- *Hľadané číslo v úlohe si označte písmenom **h**. Zapíšte vetu zo zadania pomocou rovnice s neznámou **h**.*
- *Vytvorenú rovnicu vyriešte.*
- *Zapíšte odpoveď na otázku z pôvodnej slovnej úlohy.*

Ak ste v predchádzajúcej úlohe zostavili rovnicu $h \cdot 3{,}6 = -39{,}6$, ktorej koreň je $h = -11$, je vaše riešenie správne.

8 Rovnakým postupom ako v predchádzajúcej úlohe odpovedzte na otázky:
a) Ktorým číslom musíme vynásobiť číslo 0,2, aby sme dostali 2,8?
b) Po vynásobení čísla 14,2 neznámym číslom sme dostali –0,426. Aké je neznáme číslo?
c) Súčin neznámeho čísla a čísla 2 300 je 1 150. Určte neznáme číslo.
d) Ktoré číslo je 10-krát menšie ako 200?

9 Keď sa hodnota Janových úspor po brigáde zdvojnásobila, mal našetrených 138 eur. Koľko eur mal Jano pred brigádou? Najprv si hľadaný údaj označte nejakým písmenom a potom informáciu v úlohe zapíšte pomocou rovnice. Nakoniec úlohu vyriešte.

Postupovali ste pri riešení predchádzajúcej úlohy podobne ako Peter?

Peter:
Hodnotu úspor na začiatku si označím U.
Podľa zadania platí, že $U \cdot 2 = 138$. Takže $U = 138 : 2 = 69$.
Jano mal pred brigádou našetrených 69 eur.

10 Podobne vyriešte túto úlohu: Za 8,5 metra látky zaplatíme 38,25 €. Koľko zaplatíme za 1 meter látky?

Rovnice, kde neznáma je deliteľ

Druhým typom sú rovnice, v ktorých vystupuje podiel a my hľadáme hodnotu čísla, ktorým delíme – deliteľa.

1 Nájdite čísla, ktoré sa skrývajú pod kartičkami. Riešte rovnice.
a) 24 : W = 6 b) 308 : y = 44 c) 27 336 : Q = 136 d) 5 268 624 : S = 654

Riešili ste aj tieto úlohy podobne ako Hana?

Hana

Hana:
Ja si z príkladu na delenie urobím iný príklad na delenie.
Lebo ak 24 : 6 = **4**, tak 24 : **4** = 6.
Potom z príkladu 27 336 : Q = 136 urobím príklad:
Q = 27 336 : 136 = 201.
To isté urobím aj s rovnicou:
z rovnice 5 268 624 : S = 654 dostanem S = 5 268 624 : 654 = 8 056.

2 Riešte rovnice ako Hana.
a) 5,2 : a = 26 b) 1,331 : b = 12,1 c) 25,151 4 : c = 8,01 d) 0,328 32 : d = 0,054

3 a) Pre ktoré číslo s nadobúda výraz C = 2 870 : s hodnotu rovnú 14?
b) Pre ktorú hodnotu čísla n nadobúda výraz m = 3,825 7 : n hodnotu 0,67?
c) Pre ktoré K sa výraz g = 24,597 : K rovná 0,027?

4 Vyskúšajte si aj riešenie rovníc so zápornými číslami a zlomkami.
a) 32 : a = –4 b) –56 : b = –14 c) –18 : c = 36 d) 23,088 : d = –3,12
e) $\frac{4}{5} : e = -\frac{9}{10}$ f) $-\frac{1}{8} : f = \frac{5}{7}$ g) $0{,}2 : g = -\frac{9}{10}$ h) $-\frac{2}{9} : h = -\frac{5}{12}$

5 Ktorým číslom musíme vydeliť číslo 145, aby sme dostali 580? Pri riešení tejto úlohy postupujte ako v úlohe 7 predchádzajúcej kapitoly.

Zostavili ste v predchádzajúcej úlohe rovnicu 145 : h = 580, ktorej koreň je h = 0,25? Ak áno, máte to správne.

6 Pri riešení týchto úloh postupujte rovnako ako v predchádzajúcej úlohe:
a) Ktorým číslom musím vydeliť číslo –3,92, aby som dostal 2,8?
b) Po vydelení neznámym číslom sme z čísla 1,024 dostali 32. Určte neznáme číslo.
c) Vydelením čísla 6,82 neznámym číslom dostaneme výsledok 40. Určte neznáme číslo.
d) Číslo 65 536 je niekoľkokrát väčšie ako číslo 12,8. Koľkokrát?

7 Soňa má v počítačovej hre skóre 286, čo je niekoľkokrát menej ako Ivanino skóre 3 718. Koľkokrát je Sonino skóre menšie?

Rovnice, kde neznáma je delenec

Tretím typom sú rovnice, v ktorých síce tiež vystupuje podiel, ale hľadáme hodnotu čísla, ktoré delíme – delenec.

1 Doplňte vynechané čísla, riešte rovnice.

a) $\square : 12 = 3$ b) $x : 2 = 61$ c) $\square : 39 = 71$ d) $z : 214 = 1\,348$

2 Doplňte Hanino riešenie predchádzajúcej úlohy.

Hana

Hana:

Ja si z príkladu na .... urobím príklad na ....

Lebo ak $3 \cdot 12 = \mathbf{36}$, tak $\mathbf{36} : 12 = 3$.

Potom z príkladu $\square : 39 = 71$ urobím príklad

....

To isté urobím aj s rovnicou:

z rovnice $z : 214 = 1\,348$ dostanem ....

3 Riešte rovnice ako Hana.

a) $a : 82 = 28$ b) $b : 5{,}4 = 3{,}18$ c) $c : 21{,}46 = 0{,}012$ d) $d : 586{,}8 = 3{,}2$

4 a) Pre ktoré číslo s nadobúda výraz $C = s : 41$ hodnotu rovnú 8?

b) Pre ktorú hodnotu čísla n nadobúda výraz $m = n : 2{,}43$ hodnotu 15,7?

c) Pre ktoré K sa výraz $g = K : 0{,}91$ rovná 308?

5 Určite zvládnete aj rovnice so zápornými číslami a zlomkami.

a) $a : 37 = -8$ b) $b : (-41) = -12$ c) $c : (-18) = 27$ d) $d : (-4{,}18) = -3{,}12$

e) $e : \frac{4}{5} = \frac{3}{2}$ f) $f : \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{7}$ g) $g : 0{,}2 = \frac{9}{11}$ h) $h : \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{12}$

6 Ktoré číslo musíme vydeliť číslom 11, aby sme dostali číslo 18,4?

Veríme, že ste si poradili aj s predchádzajúcou úlohou a riešili ste rovnicu $h : 11 = 18{,}4$, ktorej koreň je $h = 202{,}4$.

7 Tieto úlohy vyriešte rovnako ako v predchádzajúcej úlohe:

a) Ktoré číslo musíme vydeliť číslom 4,16, aby sme dostali 32,7?

b) Po vydelení neznámeho čísla číslom 345 sme dostali –8. Určte neznáme číslo.

c) Zmenšením neznámeho čísla 38-krát sme dostali číslo 21,07. Určte neznáme číslo.

d) Od ktorého čísla je číslo 51 presne 7-krát menšie?

8 Po dohodnutí tretinovej ceny budeme platiť na trhu 2,50 €. Aká bola pôvodná cena? Zostavte rovnicu a vyriešte ju.

V ďalšej úlohe sme všetky tri typy rovníc na násobenie a delenie pomiešali. Nepomýľte sa pri ich riešení.

9 Riešte rovnice.

a) $q : 6{,}4 = 3{,}2$ b) $6{,}4 \cdot p = 3{,}2$ c) $r \cdot 6{,}4 = 3{,}2$ d) $6{,}4 : s = 3{,}2$

e) $\frac{1}{4} \cdot k = 0{,}75$ f) $\frac{1}{4} : l = 0{,}75$ g) $m : \frac{1}{4} = 0{,}75$ h) $n \cdot \frac{1}{4} = 0{,}75$

Druhá Marcelova pomôcka

Marcel si ani pri rovniciach na súčin a podiel nechcel pamätať, ktorý typ rovnice má riešiť. Napísal si všetky štyri príklady s číslami 3, 4 a 12 a pozoroval, aká zmena sa udeje, keď jeden tvar zmení na druhý.

Marcel:
Viem napísať niekoľko príkladov na násobenie a delenie, pričom jeden vznikne z druhého:

$3 \cdot 4 = 12$ $4 \cdot 3 = 12$ $12 : 3 = 4$ $12 : 4 = 3$

$12 = 3 \cdot 4$ $12 = 4 \cdot 3$ $4 = 12 : 3$ $3 = 12 : 4$

V príkladoch pod sebou sú vždy len prehodené strany.

Marcel skúmal, ako možno opísať zmeny, ktoré nastanú, ak zmeníme tvar:
a) $3 \cdot 4 = 12$ na tvar $3 = 12 : 4$, *b) $3 \cdot 4 = 12$ na tvar $12 : 4 = 3$,*
c) $12 : 3 = 4$ na tvar $12 = 4 \cdot 3$, *d) $12 : 4 = 3$ na tvar $12 = 3 \cdot 4$,*
e) $12 : 3 = 4$ na tvar $12 : 4 = 3$.

1 Ako by ste vy opísali zmenu v tvaroch, s ktorými pracoval Marcel?

Porovnajte svoje riešenie s Marcelovým.

Marcel:
Keď sa menilo násobenie na delenie, tak činiteľ prešiel na druhú stranu ako deliteľ:

a) $3 \cdot 4 = 12 \rightarrow 3 = 12 : 4$

Niekedy bolo ešte treba vymeniť obidve strany rovnice:

b) $3 \cdot 4 = 12 \rightarrow 12 : 4 = 3$

Keď sa menilo delenie na násobenie, tak deliteľ prešiel na druhú stranu ako činiteľ:

c) $12 : 4 = 3 \rightarrow 12 = 3 \cdot 4$ d) $12 : 3 = 4 \rightarrow 12 = 4 \cdot 3$

Niekedy bolo treba urobiť viac zmien:

e) $12 : 3 = 4 \rightarrow 12 = 4 \cdot 3 \rightarrow 12 : 4 = 3$

Takže zjednodušene si zapamätám, že násobenie sa pri prenesení na druhú stranu rovnice mení na delenie, a naopak. Ak sa číslom na jednej strane rovnice delilo, tak po jeho prenesení na druhú stranu sa ním násobí, a opačne. Keď potrebujem, môžem – rovnako ako pri sčítaní – vymeniť obe strany rovnice.

2 Overte na príkladoch, že Marcelov objav platí. Aké zmeny sme urobili pri zmene tvaru:
a) $36 : 9 = 4$ na tvar $36 = 4 \cdot 9$, b) $4 \cdot 9 = 36$ na tvar $36 : 9 = 4$,
c) $36 : 4 = 9$ na tvar $36 = 9 \cdot 4$, d) $36 : 4 = 9$ na tvar $36 : 9 = 4$,
e) $4 \cdot 9 = 36$ na tvar $4 = 36 : 9$?

3 Pomocou vhodného „prenášania" riešte rovnice.
a) $s \cdot 41 = 123$ b) $s : 5{,}1 = 6{,}8$ c) $0{,}21 \cdot s = 42$ d) $1{,}4 : s = 56$

Veríme, že ste si s rovnicami poradili, aj keď v časti d) bolo treba prenášať až dva razy: Keďže sa neznámou delí (je to deliteľ), je lepšie najprv preniesť ju, samozrejme, ako činiteľa: $1{,}4 = 56 \cdot s$.
Až teraz prenesieme číslo 56: $1{,}4 : 56 = s$. Takže $s = 0{,}025$.

Všimnite si, že cieľom našich úprav je vždy „osamostatnenie" neznámej.

4 Vyriešte Marcelovou metódou rovnice so zlomkami, s desatinnými aj so zápornými číslami.
a) $2{,}3 \cdot a = -1{,}15$ b) $b : 5{,}7 = -13$ c) $-1{,}024 : c = 32$ d) $d \cdot 18 = -6$
e) $e : 1{,}2 = \frac{1}{8}$ f) $f \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ g) $-\frac{3}{4} \cdot g = -\frac{1}{8}$ h) $\frac{3}{20} : h = 0{,}1$

5 Myslím si číslo.
a) Keď ho vydelím číslom 4, dostanem 0,5.
b) Keď ho vynásobím číslom 4, dostanem 0,5.
c) Keď ním vydelím číslo 4, dostanem 0,5.
d) Keď ním vynásobím číslo 4, dostanem 0,5.
Ktoré číslo si myslím? Zostavte rovnicu a vyriešte ju.

Bádame na štvorčekovej sieti 5

Bodové ponorky ešte raz
Ešte raz sa zahrajte hru Bodové ponorky. Teraz však polohu ponoriek a miest zásahu opisujte podobne ako Michal, nesmiete však použiť farby. Presný spôsob opisovania si dohodnite pred začiatkom hry.
Aby ste predišli prípadným nedorozumeniam so súperom, musíte sa presne vyjadrovať aj presne zapisovať polohy, ktoré vám diktuje súper.

Úloha 1: Keď ste si hrou precvičili znázorňovanie bodov, nakreslite si novú štvorčekovú sieť a vyznačte v nej body:
bod A: 1; 5 bod B: −1; 5 bod C: 1; −5
bod D: −1; −5 bod E: 0; 4 bod F: 0; −4
bod G: 4; 0 bod H: −4; 0
Pri znázorňovaní použite rovnakú dohodu ako pri hre Bodové ponorky. Správnosť svojho riešenia si overte porovnaním so susedom.

Zložitejšie rovnice

Pamätáte sa ešte na úlohu zo strany 92?

1 Z poľa obdĺžnikového tvaru širokého 25 metrov a dlhého 300 m chceme oddeliť menší pozemok rovnakej šírky na pestovanie ruží, ktorý chceme ohradiť a použiť celé 170 m dlhé oplotenie. Aký dlhý bude tento pozemok?

Pripomeňme si, ako pomocou vzorcov začali túto úlohu riešiť Daniela a Dominik.

Daniela si na výpočet obvodu obdĺžnika vybrala vzorec $o = 2 \cdot (a + b)$. Po dosadení $o = 170$ m a $b = 25$ m dostala rovnicu $170 = 2 \cdot (a + 25)$.

Dominik na výpočet obvodu obdĺžnika použil vzorec: $o = 2 \cdot x + 2 \cdot y$. Po dosadení $o = 170$ m a $x = 25$ m dostal rovnicu $170 = 50 + 2 \cdot y$.

2 Pokúste sa vyriešiť tieto dve rovnice: $170 = 2 \cdot (a + 25)$ a $170 = 50 + 2 \cdot y$. Pripomíname, že riešením oboch rovníc by malo byť to isté číslo.

Aj vy ste si asi všimli, že tieto rovnice sú o čosi odlišnejšie a ťažšie, ako sme sa učili doteraz? Dajú sa však riešiť rovnakými metódami.

Začneme s Danielinou rovnicou $170 = 2 \cdot (a + 25)$.
Neznámu máme na pravej strane a nedá sa „osamostatniť" jednou úpravou. Nevieme naraz preniesť aj číslo 2, aj číslo 25. Urobíme to preto na dva razy.
Najprv musíme preniesť číslo 2. Na pravej strane sa ním násobí, na druhej strane sa ním teda bude deliť: $170 : 2 = a + 25$.
To je to isté ako $85 = a + 25$.
Teraz prenesieme číslo 25. Na pravej strane sa sčituje, na druhej strane sa preto bude odčitovať: $85 - 25 = a$. Takže $a = 60$.

Precvičte si riešenie podobných rovníc.

3 Riešte rovnice.

a) $150 = 5 \cdot (a - 32)$ b) $86 = 2 \cdot (17 + b)$ c) $3 \cdot (c - 4{,}6) = 11{,}7$
d) $12{,}5 \cdot (17 + d) = 25$ e) $3 \cdot (e - 2) = 27{,}9$ f) $-16{,}8 = 4 \cdot (f + 2)$

4 Čo budete ako prvé prenášať pri riešení Dominikovej rovnice $170 = 50 + 2 \cdot y$? Vyriešte túto rovnicu.

Preniesli ste najprv číslo 50 a potom číslo 2? Váš postup bol potom asi takýto:

Prenesieme číslo 50:
$170 - 50 = 2 \cdot y$, to je to isté ako $120 = 2 \cdot y$.
Potom prenesieme číslo 2:
$120 : 2 = y$, takže $y = 60$. Výsledok je rovnaký ako pri riešení Danielinej rovnice.

Filip:
Ja som najskôr preniesol číslo 2 a potom číslo 50:

$$170 : 2 = 50 + y$$
$$85 = 50 + y$$
$$85 - 50 = y, \text{ takže } y = 35.$$

Vyšlo mi to inak. Kde som sa pomýlil?

5 Kde urobil Filip chybu?

Filip urobil chybu v tom, že si nevšímal číslo 50, ktoré je tiež na pravej strane spolu s $2 \cdot y$. Číslo 2 by sme mohli prenášať, keby pravá strana bola súčin dvoch činiteľov, z ktorých jeden by bolo číslo 2. Naša pravá strana však nie je súčin, ale súčet dvoch čísel, pričom jeden sčítanec je 50, druhý $2 \cdot y$.

Poznámka:
V ďalších ročníkoch si ukážeme, že môžeme najskôr odstrániť aj číslo 2, ale pritom musíme vhodne zmeniť číslo 50. Ak sa vám nechce čakať, pozrite si úlohu pre záujemcov.

6 Predpokladajte, že číslo 2 sa dá prenášať ako prvé. Ako treba zmeniť číslo 50, aby Filip dostal správny výsledok?

Filip:
Keď porovnám svoje riešenie s Danieliným, vyzerá to tak, že som mal dvoma deliť aj číslo 50. Potom by to vyšlo:

$$170 : 2 = 50 : 2 + y$$
$$85 = 25 + y$$
$$85 - 25 = y, \text{ takže } y = 60.$$

Teraz je výsledok správny.

7 Premyslite si, prečo bolo treba deliť dvoma aj číslo 50.

8 Vyriešte rovnicu $174 - 5 \cdot t = 57$.

Riešili ste to ako Milan alebo ako Zuzana?

Milan:

Ja budem počítať so zápornými číslami.
Najprv prenesiem číslo 174. Na pravej strane sa bude odčítavať.

$-5 \cdot t = 57 - 174$

$-5 \cdot t = -117$

Teraz prenesiem číslo –5. Na ľavej strane sa ním násobí, na pravej sa ním bude deliť.

$t = -117 : (-5)$

$t = 23{,}4$

9 Riešte tieto rovnice ako Milan.

a) $27 - 2 \cdot a = 38$ b) $28{,}8 - 4 \cdot b = 7{,}6$ c) $61{,}5 = 27 - 5 \cdot c$

d) $-12{,}6 = 18 - 6 \cdot d$ e) $17 - e = 38$ f) $14{,}7 - 7 \cdot f = -56{,}21$

Zuzana:

Ja sa pri záporných číslach občas mýlim, no nebojím sa prenášať aj písmená. Najprv prenesiem $5 \cdot t$. Na ľavej strane sa $5 \cdot t$ odčítavalo, na pravej sa bude pripočítavať.

$174 = 57 + 5 \cdot t$

Teraz prenesiem 57.

$174 - 57 = 5 \cdot t$

$117 = 5 \cdot t$

Nakoniec prenesiem 5. Násobenie sa zmení na delenie.

$117 : 5 = t$

$t = 23{,}4$

Vyšlo mi to rovnako ako Milanovi.

10 Riešte tieto rovnice ako Zuzana.

a) $5{,}6 - 8 \cdot a = 6{,}4$ b) $3{,}06 - 9 \cdot b = 18{,}9$ c) $19 = 35 - 5 \cdot c$

d) $-6{,}3 = 2{,}01 - 2 \cdot d$ e) $19 - e = 37$ f) $5{,}24 - 4 \cdot f = -201$

11 Tieto rovnice riešte postupom, ktorý vám najviac vyhovuje.

a) $1{,}21 - 11 \cdot x = 1{,}331$ b) $0{,}036 - 1{,}2 \cdot x = 0{,}6$ c) $700 = 1\,015 - 15 \cdot x$

d) $7{,}2 = -0{,}08 - 8 \cdot x$ e) $71{,}92 - 5{,}8 \cdot x = 2\,924{,}94$ f) $123{,}8 - 3{,}2 \cdot x = -5\,006{,}6$

12 Precvičte si ešte riešenie rovníc so zátvorkami aj bez nich. Nepomýľte sa pri prenášaní.

a) $3{,}8 \cdot (2 + a) = 19$ b) $8 - 3 \cdot b = 23$ c) $(3 - c) : 12 = 2{,}5$

d) $4{,}5 \cdot d - 22 = 23$ e) $1{,}75 = (e + 17) \cdot 2{,}5$ f) $f : 2 + 3{,}1 = 6{,}7$

Predpokladáme, že posledné dve rovnice sa vám zdali ťažšie ako ostatné. Nie preto, lebo ste nevedeli postup, ale vinou náročnejších numerických výpočtov, pri ktorých sa možno skôr pomýliť. Ak sa chcete omylu vyhnúť, máte dve možnosti:

- *vyriešiť rovnicu ešte raz a dať si väčší pozor pri numerických výpočtoch,*
- *urobiť kontrolu.*

Kontrola, čiže skúška správnosti riešenia, sa robí tak, že vypočítaný koreň dosadíte za neznámu a skontrolujete, či skutočne nastane rovnosť, teda či sa ľavá strana rovná pravej.

13 Zistite, či $x = 1\,603{,}2$ je riešením poslednej rovnice z úlohy 11.

Peter:
Ja postupujem takto:
Ľavá strana rovnice je:

$Ľ = 123{,}8 - 3{,}2 \cdot x$

Po dosadení čísla 1 603,2:

$Ľ = 123{,}8 - 3{,}2 \cdot 1\,603{,}2 = -5\,006{,}44$

Pravá strana je:

$P = -5\,006{,}6$

Vidím, že $Ľ \neq P$, takže číslo 1 603,2 nie je koreňom danej rovnice.

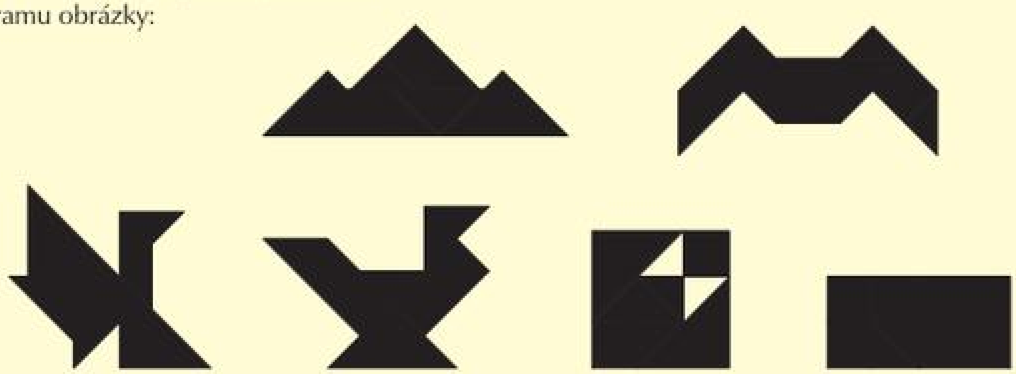
14 Urobte kontrolu tej istej rovnice pre číslo 1 603,25.

15 Urobte kontrolu rovníc z tejto kapitoly.

Tangram 4

Spomínate si na hlavolam tangram zo strán 33, 44 a 98?

Úloha 1: Zložte z pripravených dielov tangramu obrázky:



Ďalšie slovné úlohy

Doteraz ste sa stretávali najmä so slovnými úlohami, ktoré sa dali ľahko vyriešiť niekoľkými za sebou nasledujúcimi výpočtami. Pripomeňte si to ďalšou úlohou.

1 Jano mal 567 známok. Ráno vymenil 34 známok o rastlinách za 18 známok s helikoptérami. Koľko známok má po výmene?

2 Pozrite si výpočty Jula, Zdena a Kamily.

Julo:	Zdena:	Kamila:
34 – 18 = 16	567 + 18 = 585	567 – 34 + 18 = 551
567 – 16 = 551	585 – 34 = 551	

Vysvetlite tieto tri postupy.

Prišli ste na to, že:
- *Julo najskôr zistil, koľko známok Janovi ubudlo a potom tento počet odpočítal od všetkých známok?*
- *Zdeno najskôr vypočítal, koľko známok by mal Jano, keby známky iba dostal, a v druhom kroku odpočítal známky, ktoré Jano vymenil?*
- *Kamila odpočítala známky, ktoré Jano vymenil, a hneď aj pripočítala známky, ktoré získal?*

Riešte nasledujúce úlohy.

3 Soňa svoje úspory 80 € po brigáde zväčšila o 20 % a potom na nákupoch minula tretinu celkových úspor. Koľko eur jej ostalo?

4 Karol váži o 14 kg menej ako Šimon. Karol váži 64 kg. Koľko váži Šimon?

Teraz si ukážeme niekoľko úloh, ktoré tiež možno riešiť postupnými výpočtami, ale úvahy, ktoré pri nich treba urobiť, sú už náročnejšie.

5 Jano s Ferom majú spolu 922 kariet. Jano má o 250 kariet menej ako Fero. Koľko kariet má Jano a koľko Fero?

Možno ste si s touto úlohou neporadili. Nič to. Skúste zistiť, či rozumiete postupom Boženy, Hedvigy a Jana.

Božena:	**Hedviga:**	**Jano:**
922 + 250 = 1 172	922 – 250 = 672	922 : 2 = 461
1 172 : 2 = 586	672 : 2 = 336	250 : 2 = 125
586 – 250 = 336	336 + 250 = 586	461 + 125 = 586
		461 – 125 = 336

6 Skontrolujte dosadením do pôvodnej úlohy, či výsledky Boženy, Hedvigy a Jana sú správne.

7 Skúste vysvetliť tieto výpočty.

Božena:
Keby mal Jano o 250 kariet viac, tak by obidvaja mali rovnaký počet kariet. Spolu by teda mali 922 + 250 = 1 172 kariet. Vtedy by mal každý z nich 1 172 : 2 = 586 kariet. Jano má však o 250 kariet menej, teda 586 – 250 = 336. Jano má 336 kariet a Fero 586 kariet.

Hedviga:
Keby mal aj Fero o 250 kariet menej, spolu by mali 922 – 250 = 672 kariet. Každý z nich by mal 672 : 2 = 336. No Fero má v skutočnosti o 250 kariet viac, teda 336 + 250 = 586.
Jano má 336 kariet a Fero 586 kariet.

Jano:
Polovica zo všetkých kariet je 922 : 2 = 461. Ak má mať jeden o 250 kariet menej ako druhý, tak jednému musím polovicu z tohto počtu (250 : 2 = 125) pridať a druhému ubrať. Fero má 461 + 125 = 586 kariet a Jano má 461 – 125 = 336 kariet.

Vyskúšajte si, či dokážete podobne vyriešiť tieto úlohy.

8 Aj Dorka a Svetlana zbierajú karty. Spolu majú až 1 240 kariet, pričom Dorka má o 114 kariet viac ako Svetlana. Koľko kariet má ktorá?

9 Adam má trikrát viac plagátov hokejistov ako Tibor. Spolu majú 48 plagátov. Koľko plagátov má každý?

Slovné úlohy a kontrola ich riešení

Úvahy, ktoré ste si vyskúšali v predchádzajúcej kapitole, sú náročnejšie. Pri zložitejších zadaniach by ste sa dosť natrápili. Ak sa stretnete s náročnejšou úlohou, akú ste videli v závere predchádzajúcej kapitoly, budete na jej riešenie spravidla používať iný postup. Pri jeho objavovaní a vysvetľovaní vám pomôže kontrola správnosti, o ktorej sa teraz porozprávame podrobnejšie.

Začneme opäť úlohou o Janovi a Ferovi a ukážeme si až tri spôsoby kontroly.

1 Jano a Fero majú spolu 568 kariet. Fero má o 46 kariet viac ako Jano. Je pravda, že Jano má 257 kariet?

1. spôsob kontroly:

Z každej vety zistíme, koľko kariet by mal Fero, a tieto dva výsledky porovnáme.

Jano a Fero majú spolu 568 kariet. — *Odtiaľ vyplýva, že Fero by mal 568 – 257 = 311.*

Fero má o 46 kariet viac. — *Odtiaľ vyplýva, že Fero by mal 257 + 46 = 303.*

Nie je pravda, že Jano má 257 kariet.

2 Urobte túto kontrolu pre čísla 259, 255, 253, 261.

2. spôsob kontroly:

Z prvej vety zistíme, koľko kariet by mal Fero, a overíme, či pre tento výsledok platí aj druhá veta.

Jano a Fero majú spolu 568 kariet. — *Odtiaľ vyplýva, že Fero by mal 568 – 257 = 311.*

Zistíme, o koľko kariet by mal viac ako Jano: — *311 – 257 = 54.*

Nie je to správne, má ich byť len o 46 viac.

Teda nie je pravda, že Jano má 257 kariet.

3 Urobte túto kontrolu pre čísla 259, 255, 253, 261.

3. spôsob kontroly:

Z druhej vety zistíme, koľko kariet by mal Fero, a overíme, či pre tento výsledok platí aj prvá veta.

Fero má o 46 kariet viac. — *Odtiaľ vyplýva, že Fero by mal 257 + 46 = 303.*

Zistíme, koľko by mali spolu: — *257 + 303 = 560.*

Nie je to správne, má to byť až 568.

Teda nie je pravda, že Jano má 257 kariet.

4 Urobte túto kontrolu pre čísla 259, 255, 253, 261.

Skúste spraviť podobné kontroly aj pre zberateľky Svetlanu a Dorku.

5 Dorka a Svetlana majú spolu 712 kariet, pričom Dorka má o 64 kariet menej ako Svetlana. Navrhnite niekoľko čísel, ktoré by mohli byť počtom Svetlaniných kariet a overte, či váš návrh spĺňa podmienky zadania. Podarí sa vám prísť aj na to, koľko kariet má každá z nich?

6 Viera a Lucia majú spolu 120 €. Lucia má 4-krát viac eur ako Viera. Overte, či je pravda, že Viera má 30 €.

Ivan:
Ak by mala Viera 30 €, Lucia by podľa druhej vety mala 4-krát viac, čiže $4 \cdot 30$ € = 120 €. Spolu by teda mali 150 €. Preto odhad, že Viera má 30 €, nie je správny.

Zlatica:
Ak by mala Viera 30 €, podľa prvej vety by mala Lucia 120 € − 30 € = 90 €. Potom Lucia by mala 90 : 30 = 3-krát viac peňazí ako Viera. Preto tip, že Viera má 30 €, nie je správny.

7 Skúste pre úlohu 6 urobiť iné kontroly, ak by: a) Viera mala 25 €, b) Lucia mala 100 €, c) Lucia mala 95 €. Podarí sa vám zistiť, koľko eur má každá z nich?

Vyskúšajte si takéto kontroly aj pre ďalšie úlohy.

8 Overte, či je pravda, že kandidát Milý získal 372 hlasov.

Kandidát Milý získal presne 2-krát viac hlasov ako kandidát Silný.

Kandidát Silný získal presne o 252 hlasov menej ako kandidát Milý.

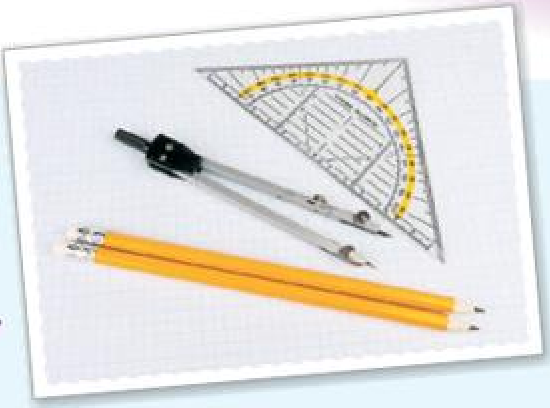
9 Urobte kontrolu pre ďalšie čísla. Podarí sa vám zistiť, koľko hlasov získal každý z kandidátov?

10 Manželia si porovnávali svoje platy. Pani Jana zistila, že má o 20 % vyšší plat ako pán Jaroslav. Spolu zarobili 1 430 €. Koľko zarobí každý z nich?

11 Dvaja robotníci si mali odmenu rozdeliť podľa množstva vykonanej práce v pomere 3 : 5. Jeden dostal o 52 € viac ako druhý. Koľko dostal ktorý?

KONŠTRUKCIE MNOHOUHOLNÍKOV 15

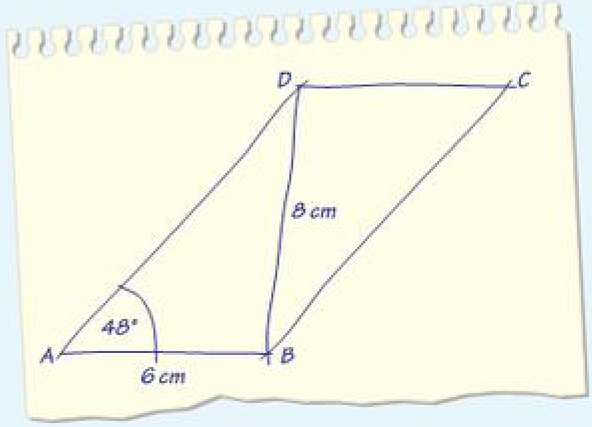
Rysujeme podľa návodu



Keď si kúpite novú skriňu, stôl alebo iný kus nábytku, dostanete k nemu návod na zmontovanie. Buď podľa tohto návodu nábytok zmontujete sami, alebo zavoláte odborníkov a zaplatíte im za ich prácu. Naopak, niekedy môžete vy vyrábať návod pre niekoho iného, ako má niečo zhotoviť, pripraviť či zostrojiť. Doteraz ste sa v učebnici stretávali najmä s obrázkovými návodmi. V tejto časti budeme trénovať prácu so slovnými návodmi, v ktorých budú niekedy celé slová či vety, inokedy značky, ktoré už poznáte.

Začneme rysovaním. Rysovanie podľa návodu si precvičíme na rysovaní rovnobežníkov a lichobežníkov. Najskôr sa pozrieme na Klaudiinu domácu úlohu.

Klaudia mala na domácu úlohu narysovať rovnobežník ABCD, ak je dané $a = |AB| = 6$ *cm,* $e = |BD| = 8$ *cm,* $\alpha = |\sphericalangle DAB| = 48°$.



Klaudia sa snaží vyjadrovať stručne a jasne. Tu je postup jej konštrukcie:

1. Uhol XAY; $|\sphericalangle XAY| = 48°$.
2. Bod B; B leží na priamke AY, $|AB| = 6$ cm.
3. Kružnicu k; $k(B, r = 8 \text{ cm})$.
4. Bod D; D je spoločný bod priamky AX a kružnice k.
5. Priamku p; p je rovnobežka s AB prechádzajúca bodom D.
6. Priamku r; r je rovnobežka s AD prechádzajúca bodom B.
7. Bod C; C je spoločný bod priamok p, r.
8. Rovnobežník ABCD.

1 Narysujte rovnobežník *ABCD* podľa Klaudiinho postupu.

Po narysovaní Klaudia zistila, že úloha bude mať asi viac riešení. Pozrime sa preto na túto konštrukciu podrobnejšie.

2 Koľko bodov *B* spĺňajúcich podmienky z 2. bodu Klaudiinho postupu existuje?

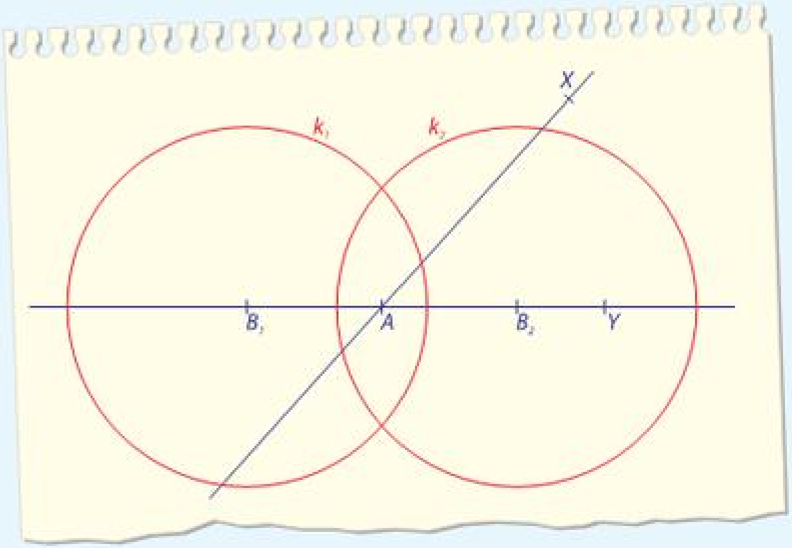
Aj vy ste zistili, že existujú dva také body?

Aby sme nezabudli na nijaké riešenie, uzavrieme túto dohodu:

Dohoda

Ak v niektorom kroku konštrukcie vznikne viac možností, kde môže ležať konštruovaný objekt (bod, priamka...), budeme v konštrukcii pokračovať pre každú z týchto možností.

Ak budeme pokračovať v rysovaní podľa tejto dohody, dostaneme dve kružnice k. Aby sa nám opakujúce sa body, priamky či kružnice nepletli, budeme ich označovať takto: k_1, k_2. Dostaneme tento obrázok:

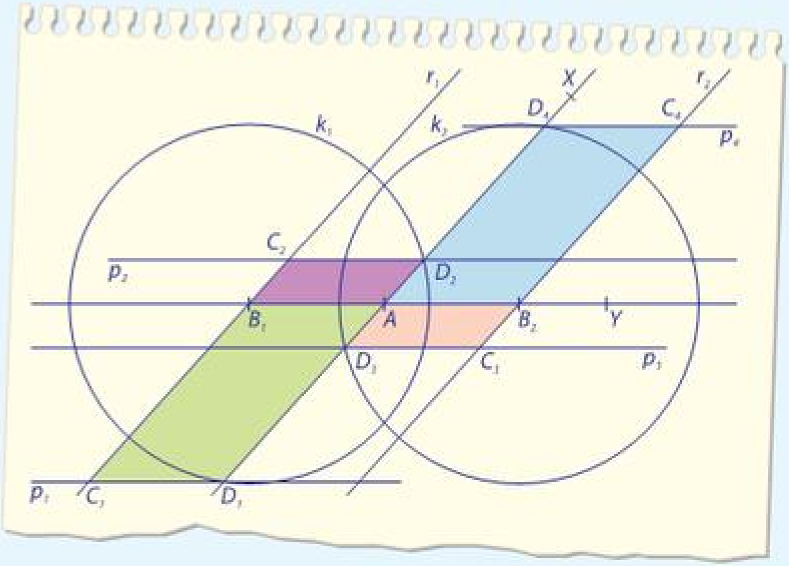


3 Podobná situácia ako s bodom *B* nastane pri každej kružnici ešte raz. Koľko priesečníkov má priamka *AX* s kružnicou k_1? Koľko priesečníkov má priamka *AX* s kružnicou k_2? Koľko bodov *D* môže celkovo vzniknúť?

Ak pre každý zo štyroch bodov D dorysujeme obidve rovnobežky, dostaneme spolu štyri rôzne body C. Vzniknú spolu štyri rozdielne štvoruholníky ABCD.

4 Narysujte všetky štyri štvoruholníky.

Na našom obrázku sa volajú $AB_2C_4D_4$, $AB_2C_3D_3$, $AB_1C_1D_1$, $AB_1C_2D_2$.



5 Pri rysovaní vyšli štyri štvoruholníky. Znamená to, že Klaudiina úloha má štyri rôzne riešenia? Dopredu sa na túto otázku nedá odpovedať. Musíme si to overiť.

6 Meraním overte, či všetky štyri štvoruholníky, ktoré vyšli, vyhovujú zadaniam úlohy. Teda overte, či:

- sú to rovnobežníky,
- v každom platí $a = |AB| = 6$ cm,
- v každom platí $e = |BD| = 8$ cm,
- v každom platí $\alpha = |\sphericalangle DAB| = 48°$.

Aj bez merania, čiže voľným okom, vidíme, že:

- *dva a dva z narysovaných štvoruholníkov sú rovnaké,*
- *dva z nich majú uhol BAD tupý, teda nemôže mať veľkosť 48°.*

Už nám zostáva len jeden štvoruholník a v ňom sa meraním presvedčíme, že vyhovuje zadaniu úlohy.
Ak chceme, aby sa medzi výslednými objektmi objavilo čo najmenej takých, ktoré nie sú hľadaným riešením, pomôže, keď sa budeme vyjadrovať presnejšie. Napríklad, keby sme v Klaudiinom postupe zmenili 2. bod takto:

2. Bod B; B leží na polpriamke AY, |AB| = 6 cm.

vyšiel by pri rysovaní iba jeden bod B (porovnajte s riešením úlohy 2).

Vytvorte aspoň trojčlenné skupiny a spoločne ako skupina vyriešte tieto tri úlohy. Ako súčasť riešenia každej z nich napíšte postup konštrukcie. Zistite aj to, koľko štvoruholníkov vám v každej úlohe vyšlo a koľko rôznych riešení má úloha.

7 Narysujte rovnobežník $ABCD$, ak je dané $|AB| = 8$ cm, $|BD| = 8$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 30°$.

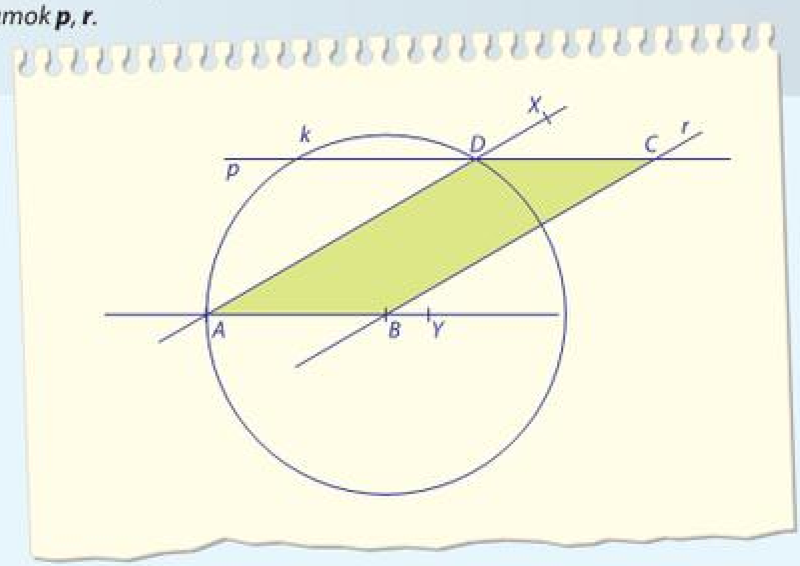
8 Narysujte rovnobežník $EFGH$, ak je dané $|EF| = 8$ cm, $|FH| = 6$ cm, $|\sphericalangle HEF| = 32°$.

9 Narysujte rovnobežník $ABCD$, ak je dané $|BC| = 6{,}3$ cm, $|CA| = 6$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 44°$.

Asi ste si všimli, že vo všetkých troch úlohách ste riešili podobnú úlohu, ako riešila Klaudia. Rozdiel bol iba v tom, že tieto rovnobežníky sa inak volali a dané čísla – dĺžky strán a veľkosti uhlov – boli iné. To znamená, že postup konštrukcie bol vždy rovnaký. Narysované obrázky by sa však mali od seba líšiť. Prejdime si jednotlivé úlohy. Farebne sme zvýraznili odlišnosti od zápisu Klaudiinho postupu konštrukcie.

K úlohe 7:

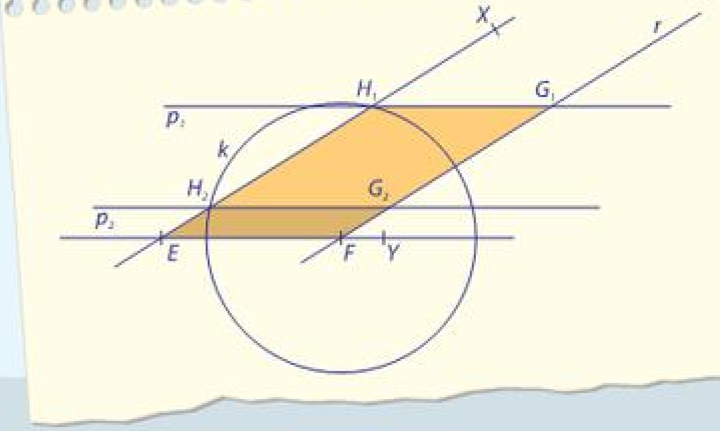
1. *Uhol **XAY**; $|\sphericalangle XAY| = 30°$.*
2. *Bod **B**; **B** leží na polpriamke **AY**, $|AB| = 8$ cm.*
3. *Kružnicu **k**; **k**(**B**, **r** = 8 cm).*
4. *Bod **D**; **D** je spoločný bod polpriamky **AX** a kružnice **k**.*
5. *Priamku **p**; **p** je rovnobežka s **AB** prechádzajúca bodom **D**.*
6. *Priamku **r**; **r** je rovnobežka s **AD** prechádzajúca bodom **B**.*
7. *Bod **C**; **C** je spoločný bod priamok **p**, **r**.*
8. *Rovnobežník **ABCD**.*



Ak ste rysovali presne, kružnica k pretne polpriamku AX v bode A a ešte v jednom bode (označili sme ho D). Táto úloha teda bude mať iba jedno riešenie.

K úlohe 8:

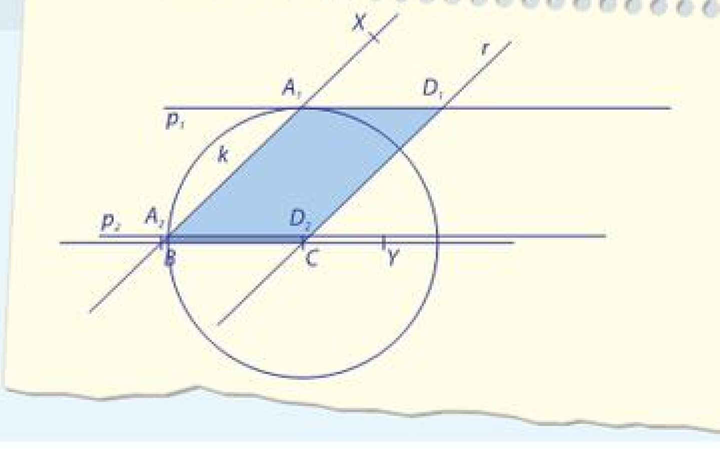
1. Uhol **XEY**; $|\sphericalangle XEY| = 32°$.
2. Bod **F**; **F** leží na polpriamke **EY**, $|EF| = 8$ cm.
3. Kružnicu **k**; **k**(**F**, **r** = 6 cm).
4. Bod **H**; **H** je spoločný bod polpriamky **EX** a kružnice **k**.
5. Priamku **p**; **p** je rovnobežka s **EF** prechádzajúca bodom **H**.
6. Priamku **r**; **r** je rovnobežka s **EH** prechádzajúca bodom **F**.
7. Bod **G**; **G** je spoločný bod priamok **p**, **r**.
8. Rovnobežník **EFGH**.



Ak ste rysovali presne, kružnica k má s polpriamkou EX dva rôzne priesečníky H_1, H_2. Každý z nich vedie k jednému riešeniu. Preto bude mať úloha spolu 2 rôzne riešenia.

K úlohe 9:

1. Uhol **XBY**; $|\sphericalangle XBY| = 44°$.
2. Bod **C**; **C** leží na polpriamke **BY**, $|BC| = 6{,}3$ cm.
3. Kružnicu **k**; **k**(**C**, **r** = 6 cm).
4. Bod **A**; **A** je spoločný bod polpriamky **BX** a kružnice **k**.
5. Priamku **p**; **p** je rovnobežka s **BC** prechádzajúca bodom **A**.
6. Priamku **r**; **r** je rovnobežka s **BA** prechádzajúca bodom **C**.
7. Bod **D**; **D** je spoločný bod priamok **p**, **r**.
8. Rovnobežník **ABCD**.



Ak ste rysovali presne, aj v tomto prípade má kružnica k s polpriamkou BX dva rôzne priesečníky A_1, A_2 (jeden z nich je veľmi blízko bodu B, preto je dôležité rysovať čo najpresnejšie). Každý z nich vedie k jednému riešeniu. Preto bude mať úloha spolu 2 rôzne riešenia.

10 Narysujte rovnobežník $ABCD$, ak je dané a) $|AD| = 8$ cm, $|BA| = 4$ cm, $\alpha = 60°$, b) $|AD| = 8$ cm, $|BA| = 4$ cm, $\beta = 120°$, c) $|AD| = 8$ cm, $|CD| = 4$ cm, $\alpha = 60°$.

11 Narysujte rovnobežník $ABCD$, ak je dané a) $|AD| = 8$ cm, $|BA| = 4$ cm, $|BD| = 5$ cm, b) $|AD| = 8$ cm, $|CA| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, c) $|AD| = 8$ cm, $|BA| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm.

12 Kamila mala narysovať rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, v ktorom sú dané tri prvky. Tie vám však neprezradíme. Poskytneme vám len jej správny postup konštrukcie:

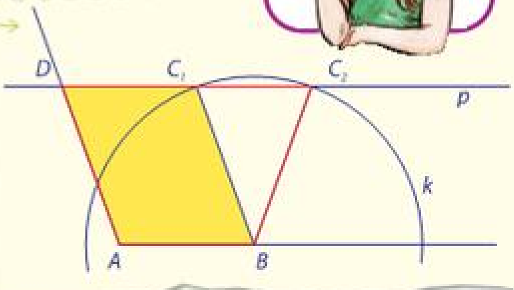
1. Narysujem uhol BAD tak, aby $|AB| = 4$ cm, $|DA| = 5$ cm, a uhol BAD mal veľkosť 110°.
2. Bodom D vediem rovnobežku p s priamkou AB.
3. V bode B zostrojím kružnicu k s polomerom 5 cm.
4. Priesečník kružnice k a priamky p označím C.
5. Zostrojím štvoruholník $ABCD$.

a) Rysujte podľa tohto postupu konštrukcie.
b) Koľko bodov C vám vzniklo?
c) Zistite, ktoré tri prvky mohli byť dané.
d) Overte, či vami narysované štvoruholníky vyhovujú zadaniu, ktoré ste doplnili.

Vyšiel vám taký istý obrázok ako Gabriele? Porovnajte svoje riešenie predchádzajúcej úlohy s Gabrieliným riešením.

Gabriela:

V časti a) mi vyšiel takýto obrázok:

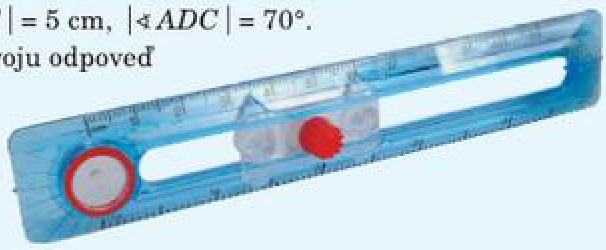


b) Vznikli mi dva rôzne body C, označila som ich C_1 a C_2, aby som ich od seba odlíšila.

c) Myslím, že dané mohli byť napríklad tieto údaje: dĺžka úsečky AB je 4 cm, dĺžka úsečky AD je 5 cm, veľkosť uhla BAD je 110°.

d) Dostala som dva štvoruholníky:
ABC_2D (ohraničený červenou čiarou) je rovnoramenný lichobežník, pretože úsečky AD aj BC_2 merajú 5 cm a úsečky AB a C_2D sú rovnobežné.
ABC_1D (vyplnený žltou farbou) je rovnobežník.

13 Florián tvrdí, že zadanie predchádzajúcej úlohy mohlo znieť: Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňou AB, ak je dané $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|\sphericalangle ADC| = 70°$. Môže mať Florián pravdu? Svoju odpoveď zdôvodnite.



14 Pavla mala zostrojiť pravouhlý lichobežník *ABCD* so základňami *AB* a *CD* s pravým uhlom pri vrchole *A*. Tu je jej správny postup konštrukcie:

1. Trojuholník ABD; podľa vety sus: $|AB| = 7$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 90°$.
2. Kružnica k; stred A, polomer 5 cm.
3. Priamka p; p je rovnobežná s priamkou AB a prechádza bodom D.
4. Bod C; C je priesečník priamky p a kružnice .
5. Lichobežník $ABCD$.

a) Zostrojte podľa tohto postupu lichobežník *ABCD*.
b) Ktoré prvky mohli byť dané?
c) Koľko štvoruholníkov *ABCD* na základe tejto konštrukcie vzniklo?
d) Koľko má úloha riešení?

15 Emil mal zostrojiť pravouhlý lichobežník *ABCD* so základňami *AB* a *CD* s pravým uhlom pri vrchole *B*. Tu je jeho správny postup konštrukcie:

1. Na základe vety sss trojuholník ABD; $|AB| = 7$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|BD| = 4$ cm.
2. V bode B kolmicu k na priamku AB.
3. Rovnobežku p s priamkou AB prechádzajúcu bodom D.
4. Priesečník priamky p a kolmice k označím C.
5. Lichobežník $ABCD$.

a) Zostrojte podľa tohto postupu lichobežník *ABCD*.
b) Ktoré prvky mohli byť dané?
c) Koľko štvoruholníkov *ABCD* na základe tejto konštrukcie vzniklo?
d) Koľko má úloha riešení?

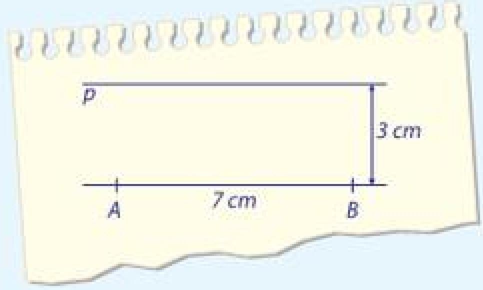
Dokončujeme konštrukcie

V predchádzajúcej kapitole sme sa venovali veľmi užitočnej veci – práci podľa návodu. Podobné návody, aké ste v tejto kapitole videli, by ste sa mali naučiť aj vytvárať. Najskôr sa naučíme niečo jednoduchšie: dokončovať návody a konštrukcie. Pomôžu nám pri tom úlohy, kde z útvarov ostali narysované len niektoré body alebo čiary. Takéto úlohy budeme v tejto učebnici volať reštaurátorské úlohy.

1 Zistite, kto je reštaurátor a čo znamená reštaurovať.

Pozrime sa, ako by mohla takáto reštaurátorská úloha vyzerať v matematike:

Zo štvoruholníka ABCD zostali body A, B vzdialené 7 cm. Okrem toho ostala rovnobežka p s priamkou AB, ktorá je od AB vzdialená 3 cm. Okrem útvarov, ktoré ostali, vieme, že body C a D v pôvodnom štvoruholníku ležali na priamke p.
Neskôr sme sa dozvedeli, že |AD| = 5 cm.



2 Prerysujte do zošita body A a B a priamku p. Dokážete na základe uvedených údajov zostrojiť štvoruholník $ABCD$?

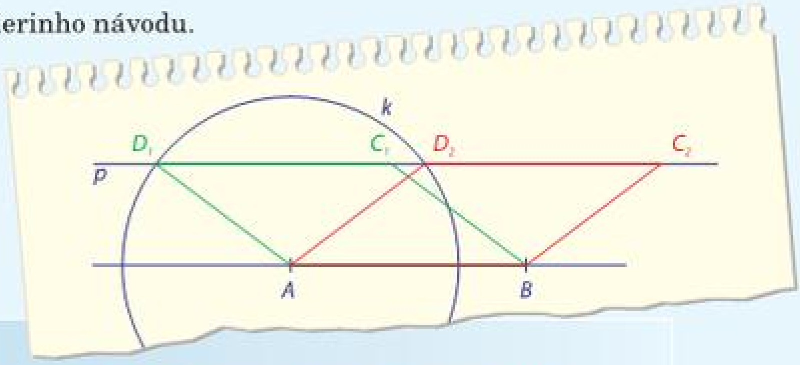
Asi ste zistili, že hoci vieme určiť, kde by mohol ležať bod D, na zostrojenie bodu C a tým aj štvoruholníka ABCD je to ešte stále veľmi málo informácií. Iba ak by to bol nejaký špeciálny štvoruholník.

3 Milada si myslí, že to bol rovnobežník. Dokončite konštrukciu štvoruholníka $ABCD$, ak je to rovnobežník. Napíšte aj postup dokončenia konštrukcie.
Zistite, koľko štvoruholníkov $ABCD$ na základe vášho postupu vzniklo a koľko má úloha riešení.

Viera:
Ja som zostrojila kružnicu k so stredom A a polomerom 5 cm. Tam, kde kružnica k pretne priamku p, dostanem bod D. Potom vpravo od neho na priamke p zostrojím bod C tak, aby úsečky AB a CD mali rovnakú veľkosť.

4 Dokončite konštrukciu podľa Vierinho návodu.

Aj vám vyšiel takýto obrázok s dvoma štvoruholníkmi ABCD?



Viera:
Mne sa zdajú obidva rovnobežníky ABC_1D_1 a ABC_2D_2 rovnaké, len majú rôznu polohu. Úloha má teda jedno riešenie.

Zuzana:
Mne sa to nezdá. Ja sa na to pozerám ako na obraz na stene. Pre mňa sú tie dva štvoruholníky dva rozličné obrazy. Súhlasím s tebou, že po presunutí a nejakom prevrátení sú rovnaké, ale podľa mňa sú to dve riešenia.

5 Rozsúďte Vieru a Zuzanu.

Predpokladáme, že ste prišli na to, že svoju logiku má aj argument Zuzany, aj argument Viery. Aby sme si však rozumeli, musíme sa nejako dohodnúť. My budeme takéto riešenia považovať za rôzne, hoci sa na seba veľmi podobajú.

Vráťme sa teraz k pôvodnej reštaurátorskej úlohe.

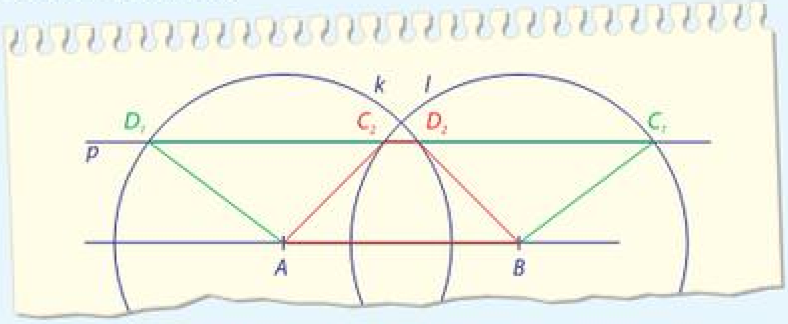
6 Emil si myslí, že štvoruholník $ABCD$ bol rovnoramenný lichobežník. Dokončite konštrukciu štvoruholníka $ABCD$, ak je to rovnoramenný lichobežník. Napíšte postup dokončenia konštrukcie. Zistite, koľko štvoruholníkov $ABCD$ na základe vášho postupu vzniklo a koľko má úloha riešení.

Emil:
Ja som zostrojil dve kružnice a potom som iba dokončil rysovanie:

1. kružnica k so stredom A a polomerom 5 cm,
2. kružnica l so stredom B a polomerom 5 cm,
3. bod D v priesečníku kružnice k a priamky p,
4. bod C v priesečníku kružnice l a priamky p,
5. štvoruholník ABCD.

7 Dokončite konštrukciu podľa Emilovho návodu.

Vyšiel vám takýto obrázok?



8 Koľko riešení má úloha?

Asi ste si všimli, že sa dajú vytvoriť iba dva rovnoramenné lichobežníky: ABC_1D_1 a ABD_2C_2. Štvoruholníky ABC_1D_2 a ABC_2D_1, ktoré možno zostrojiť zo skonštruovaných bodov, nás nezaujímajú, lebo sú to rovnobežníky, nie lichobežníky.

9 Vysvetlite, prečo rovnoramenný lichobežník ABD_2C_2 nie je riešením Emilovho príkladu.

Takže Emilov príklad mal iba jedno riešenie.

10 Daniela si myslí, že štvoruholník $ABCD$ bol pôvodne pravouhlý lichobežník. Dokončite konštrukciu štvoruholníka $ABCD$, ak je to pravouhlý lichobežník. Napíšte postup dokončenia konštrukcie. Zistite, koľko štvoruholníkov $ABCD$ na základe vášho postupu vzniklo a koľko má úloha riešení.

11 Zo štvoruholníka *ABCD* zostali body *A*, *B* vzdialené 7 cm. Ostala aj rovnobežka *p* s priamkou *AB*, ktorá je od *AB* vzdialená 3 cm. Okrem útvarov, ktoré ostali, vieme, že body *C* a *D* v pôvodnom štvoruholníku ležali na priamke *p*.
Neskôr sme sa dozvedeli, že $|AC| = 5$ cm. Dokončite konštrukciu štvoruholníka *ABCD*, ak viete, že je to:

a) rovnoramenný lichobežník,
b) pravouhlý lichobežník,
c) rovnobežník.

12 Zo štvoruholníka *ABCD* zostali len body *A*, *C* vzdialené 7 cm a priamka *p*, na ktorej ležal bod *B*. Neskôr sme sa dozvedeli, že $|AB| = 5$ cm. Dokončite konštrukciu štvoruholníka *ABCD*, ak viete, že je to:

a) pravouhlý lichobežník so základňou *BC*,
b) rovnobežník.

13 Riešte predchádzajúcu úlohu, ak viete, že štvoruholník *ABCD* je rovnoramenný lichobežník.

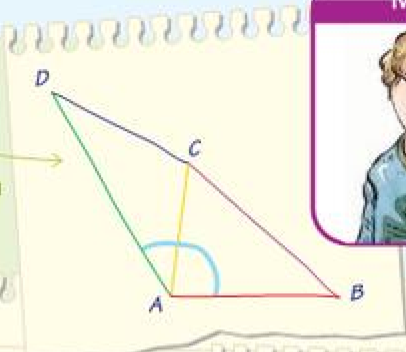
Rysujeme po častiach

P*ri rysovaní niektorých útvarov môže pomôcť, keď si konštrukciu rozdelíme na viac častí. Potom, po krokoch, narysujeme najskôr jednu časť obrázka, potom druhú časť atď., až kým nenarysujeme celý útvar.*

1 Narysujte štvoruholník *ABCD*, v ktorom poznáte: $|AB| = 5$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm a $|\sphericalangle DAB| = 120°$. Najprv sa snažte narysovať nejakú časť tohto štvoruholníka a po jej narysovaní zistite, ako pokračovať. Pomôžte si náčrtom.

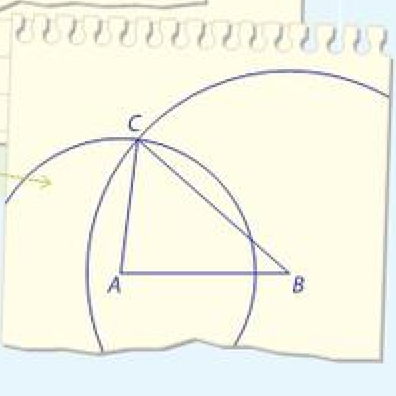
Milan:

Tu je môj náčrtok:



Všimol som si, že v trojuholníku *ABC* poznám všetky jeho strany, začnem teda ním.

1. Trojuholník ABC; podľa vety sss:
$|AB| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm.

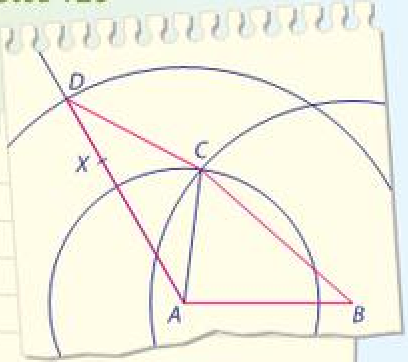


2 Dokončite Milanovu konštrukciu štvoruholníka *ABCD*.

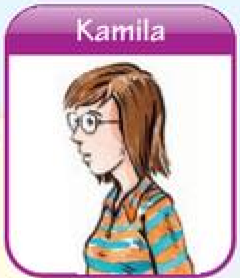
Milan:

Zo zadania mi zostala ešte strana $|AD| = 7$ cm a uhol $|\sphericalangle DAB| = 120°$. Keď už mám narysovaný trojuholník ABC, tak viem zostrojiť uhol s veľkosťou 120° s vrcholom A a ramenom AB. Na jeho druhé rameno môžem naniesť stranu AD:

2. Uhol XAB; $|\sphericalangle XAB| = 120°$.
3. Na rameno AX nanesiem bod D tak, aby $|AD| = 7$ cm.
4. Štvoruholník $ABCD$.

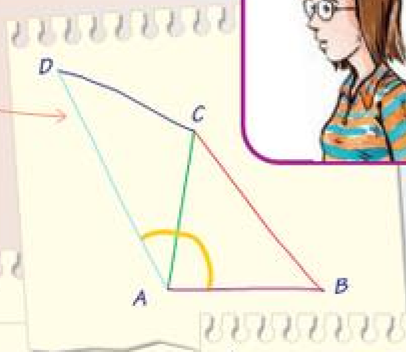


Kamila pri konštrukcii štvoruholníka ABCD postupovala inak.



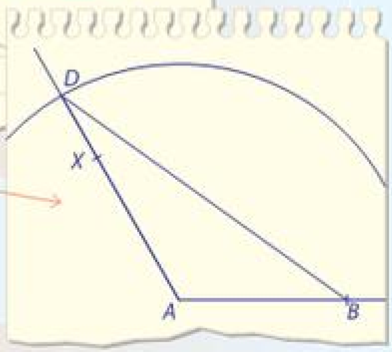
Kamila:

Tu je môj náčrt:



Ja som si všimla trojuholník DAB. Poznám v ňom dve strany a uhol medzi nimi, začala som preto ním.

1. Trojuholník DAB; podľa vety sus: $|AB| = 5$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 120°$.

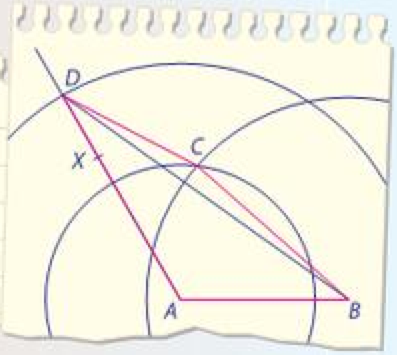


3 Dokončite Kamilinu konštrukciu.

Kamila:

Zo zadania mi zostali strany $|BC| = 6$ cm a $|AC| = 4$ cm. Keď mám narysovaný trojuholník DAB, tak strana AB je už narysovaná. Potom viem narysovať aj trojuholník ABC.

2. Trojuholník ABC; podľa vety sss: AB je už narysovaná, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm.
3. Štvoruholník $ABCD$.



4 Rysujte štvoruholník $ABCD$ ešte raz, len s inou veľkosťou uhla. Narysujte štvoruholník $ABCD$, v ktorom poznáte $|AB| = 5$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm a a) $|\sphericalangle DAB| = 88°$, b) $|\sphericalangle DAB| = 70°$.

5 Ktorý trojuholník narysujete v tejto úlohe ako prvý? Narysujte štvoruholník $ABCD$, v ktorom poznáte $|CD| = 5$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|AC| = 6$ cm a $|\sphericalangle CAB| = 20°$, $|\sphericalangle BCA| = 30°$.

6 V predchádzajúcej úlohe sa dá ako prvý narysovať iný trojuholník, než ste zvolili vy. Nájdite tento trojuholník, zostrojte ho a konštrukciu dokončite.

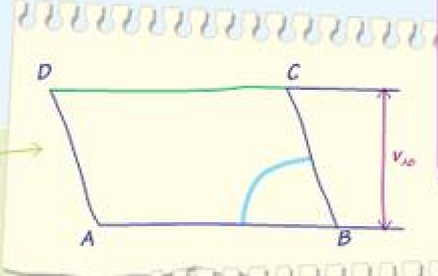
7 Úlohe 5 vyhovujú až dva rôzne štvoruholníky. Nájdite ich.

8 Ktorým trojuholníkom začnete konštrukciu teraz? Narysujte štvoruholník $ABCD$, v ktorom poznáte $|BD| = 5$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|AC| = 6$ cm a $|\sphericalangle CAB| = 20°$, $|\sphericalangle ACB| = 100°$.

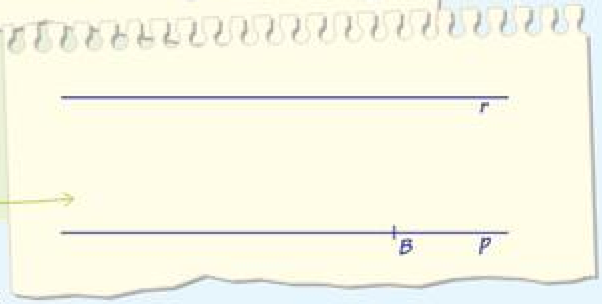
9 Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom poznáte $v_{AB} = 4$ cm, $|DC| = 7$ cm a $|\sphericalangle ABC| = 70°$.

Postupovali ste rovnako ako Milan?

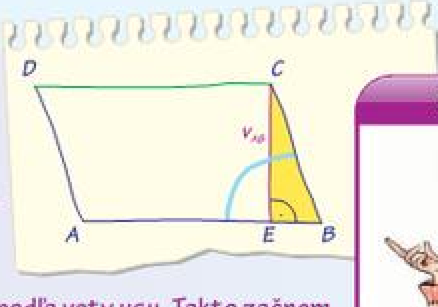
Milan:
Začnem náčrtom, kde farebne vyznačím všetko, čo je dané.



Keď mám danú výšku, snažím sa začať ňou. Preto som ako prvé narysoval rovnobežky *p* a *r* vo vzdialenosti 4 cm. Na dolnej priamke *p* som si zvolil bod *B*.



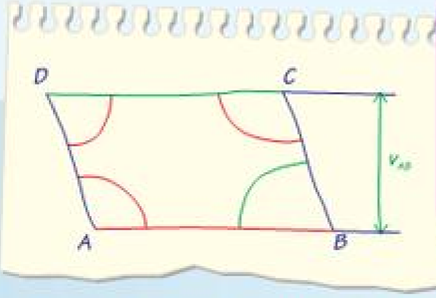
10 Začnite ako Milan a konštrukciu dokončite.



Soňa:
Ja som postupovala inak. Keď mám danú výšku, snažím sa vyznačiť ju na vhodné miesto. V tomto prípade na kolmici v bode *C*. Vidím, že v trojuholníku *BCE* poznám stranu *CE* a mám dané všetky uhly alebo si ich môžem dopočítať. Potom ho viem zostrojiť podľa vety usu. Takto začnem.

11 Začnite ako Soňa a konštrukciu dokončite.

Daniela postupovala inak než Milan aj Soňa.



Daniela:
Ja si najprv na náčrtku označím aj tie prvky, ktoré síce nie sú priamo dané, ale dajú sa vypočítať.

Keďtotiž v rovnobežníku poznám jeden uhol, tak vlastne poznám všetky. Protiľahlé strany sú v rovnobežníku rovnako dlhé. Vidím, že začnem stranou AB a uhlami pri vrcholoch A a B. Potom narysujem rovnobežku vo vzdialenosti 4 cm.

12 Zapíšte Danielin postup a podľa neho zostrojte daný rovnobežník.

Odteraz si poradie jednotlivých krokov rysovania voľte sami.

13 Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom poznáte $v_{BC} = 3$ cm, $|DC| = 7$ cm a $|AD| = 4$ cm.

14 Daniela mala zostrojiť rovnobežník $ABCD$, v ktorom poznáme $v_{AB} = 4$ cm, $|BC| = 7$ cm a $|AC| = 8$ cm. Dokončite Danielin postup konštrukcie:

1. Rovnobežky s, t vzdialené 4 cm. Na priamke t si zvolíme bod C.
2. Kružnica k so stredom v bode C a polomerom 7 cm.
3. Jeden priesečník kružnice k a priamky s označíme B.

15 Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom poznáte $v_{BC} = 3$ cm, $|AC| = 7$ cm a $|AD| = 4$ cm.

16 Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom poznáte $v_{AB} = 3$ cm, $|AC| = 7$ cm a $|AD| = 4$ cm.

17 Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom poznáte $|AB| = 6$ cm, $\alpha = 50°$, $v_a = 3$ cm.

18 Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom poznáte $|BC| = 6$ cm, $\alpha = 35°$, $v_a = 3$ cm.

19 Zostrojte lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, v ktorom poznáte $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 4$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

20 Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, v ktorom poznáte $|AD| = 4$ cm, $|BD| = 6$ cm, $|\sphericalangle ADC| = 60°$.

Výsledky úloh

Racionálne čísla

Celé čísla – pokračovanie

Násobenie a delenie celých čísel

4/1 –1; 1; –1; 1; –1; 1

4/2 a) –1; b) 1; c) 1; d) –1; e) –1; f) 1

4/3 –1; 1

4/4 –30; 48; –144

5/5 nepárny, párny, párny, nepárny, nepárny, nepárny a bude, nebude, nebude, bude, bude, bude

5/6 –10; 20; 100; –20; –160; –400

5/7 Po riadkoch: 20, –20, 20, –20, 15, –15, 15, –15

6/8 Po riadkoch: 7; –7; –7; 7; 116; 116; –116; –116

6/9 Kladné číslo, kladné číslo, záporné číslo, záporné číslo.

6/10 a) 10, b) 10, c) –10

6/11 A = 10; B = 7; C = –2; D = –4; E = –2; F = –5; G = –2; H = –0,5

Racionálne čísla

Účtovné knihy a farebné čísla ešte raz

7/1 11,47 €; 8,29 €; 2,94 €; 2,92 €; 2,53 €; 0,38 €; 0,09 €; 3,02 €; 4,79 €; 6,84 €; 12,64 €.

7/2 a) 7,57 €, b) 9,57 €, c) 14,09 €, d) 10,23 €.

7/3 a) 1,73 €, b) 2,32 €.

7/4 a) 4,46 €, b) 28,33 €.

8/5 14,18 €, 14,18 €, 2,14 €, 2,14 €, 9,78 €, 9,78 €, 6,40 €, 6,40 €, 7,96 €, 128,42 €, 128,42 €, 7,96 €.

8/7 Pani Soňa je v čiernych číslach. Pani Katarína je v červených číslach.

8/8 142,98 €, 142,98 €, 38,49 €, 38,49 €, 107,45 €, 107,45 €.

8/9 1,64 €, 1,64 €, 1,45 €, 1,45 €, 11,87 €, 11,87 €.

8/10 21,86; 10,84; 37,20; 16,91

8/11 8,01; 11,04; 30,59; 8,38; 101,1; 7,06; 58,42; 8,63

Kladné a záporné racionálne čísla a výpočty s nimi

9/1 –5; –8; –7,6; –0,08; –23,506; –1,790 4

9/2 –12,64 €; –11,47 €; –8,29 €; –6,84 €; –2,94 €; –0,38 €; 0,09 €; 2,53 €; 2,92 €; 3,02 €; 4,79 €.

9/3 –12,1 °C; –8,4 °C; –3,8 °C; –3,7 °C; –3,2 °C; 0 °C; 2,3 °C; 4,1 °C; 16,2 °C

9/4 –0,6 °C, 2,7 °C pod nulou, 1,2 °C, 3,5 °C pod nulou, –2,4 °C.

10/6 a) –3,6; –3; –1,8; –1,2; –0,6; 0,6; b) –1; –0,9; –0,7; –0,4; –0,1; 0,2; 0,4; 0,6; c) –1; –2; –2,5; –3; –4; –4,5; –5,5; –7; d) –1,4; –1,2; –0,8; –0,4; –0,2; 0; 0,4; e) 1,1; 0,8; 0,4; 0,3; 0,1; –0,2; –0,5; –0,6; –0,7; –0,8; f) 0,75; 0,25; 0; –0,25; –0,75; –1

10/7 8,16 € + 6,02 €; –8,16 € + (–6,02 €); 8,16 € + (–6,02 €); –8,16 € + 6,02 €.

10/8 –14,18

11/9 –2,14

11/10 a) –15,1; b) 15,8; c) $-\frac{9}{3} = -3$; d) –2,1; e) –31; f) $-\frac{7}{3}$

11/11 Pretože napr. zlomok $\frac{2}{-5}$ je rovnaký, ako zlomok $\frac{-2}{5}$. Podobne zlomok $\frac{-2}{-5}$ je rovnaký ako zlomok $\frac{2}{5}$.

11/12 a) 7; b) –4; –8; c) 2,3; 7; d) –4; –0,08; $-\frac{2}{5}$; –1,03; –8; e) 2,3; $\frac{1}{3}$, 7; f) –4; –0,08; $-\frac{2}{5}$; –1,03; –8; $-\frac{11}{7}$

11/13 Napr. a) 2,7; 0,08; b) $-\frac{1}{9}$; $-\frac{2}{11}$.

12/14 –3,8; 2,176; $\frac{1}{9}$; $-\frac{2}{11}$.

12/15 3,4 a –3,4; 4,3 a –4,3; $\frac{4}{3}$ a $-\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$ a $-\frac{3}{4}$

12/16 –2,14

12/17 a) –2,1; b) –15,8; c) $\frac{7}{3}$; d) –15,1; e) –15,8; f) $\frac{9}{3} = 3$

12/18 a) Absolútna hodnota čísla –7,18 je 7,18. Správne. b) Absolútna hodnota čísla 7,18 je –7,18. Nesprávne. c) Absolútna hodnota čísla 7,18 je rovnaká ako absolútna hodnota čísla –7,18. Správne.

12/19 a) 3,2; b) $\frac{8}{5}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 3,892; e) 2,15; f) 0

12/20 –7,36; –0,21; 6,4; $\frac{3}{8}$

13/21 Napr.:

13/22 a) 13,08 a –13,08; b) 1,17 a –1,17; c) $\frac{4}{3}$ a $-\frac{4}{3}$

13/23 0,25; –0,25; –0,25; 0,25

13/24 –3 ; 0,5 ; –0,5 ; 0,25 ; –0,125 ; –0,375

13/25 –0,08; 2; –0,5; 0,08; –0,5; 18; 0,5; –18

13/26 –1; 12; –1

14/28 –7

14/29 1,5

14/31 a) –0,5; b) –1; c) 0,5; d) $\frac{474}{155} \doteq 3{,}06$; e) –0,05

Krížom-krážom s racionálnymi číslami

15/1 0,2; –0,5; –0,8; –1,3; 1; 0,25; 4,25; $-0{,}\overline{2}$; 0; nemá riešenie

15/2 A = –2,8; B = 2,5; C = –0,5; D = –66; E = 1,69; F = 4,5; G = –12,5; H = 20

15/3 a) Vyššie mal príjmy. b) O 12,10 €. c) 2 410,55 €.

15/4 a) $\frac{1}{8}$, b) $-\frac{3}{2}$, c) $-\frac{18}{25}$, d) $-\frac{2}{25}$

16/5 16,1; 58,9; 16,1; 58,9; 12,5; 19,9; 19,9; 12,5

16/6 a) $P(6) = 4$; b) $P(12) = 8$; c) $P\left(-\frac{9}{11}\right) = -\frac{6}{11}$.

16/7 V Komárne o 8,2 °C, v Komárne o 11,2 °C, v Námestove o 1,4 °C, v Komárne o 1,3 °C, v Komárne o 9,3 °C.

Rovnobežnosť a štvoruholníky

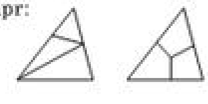
Štvoruholníky

17/1 *EFGH*, *UVWZ*, *IJKL*, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$

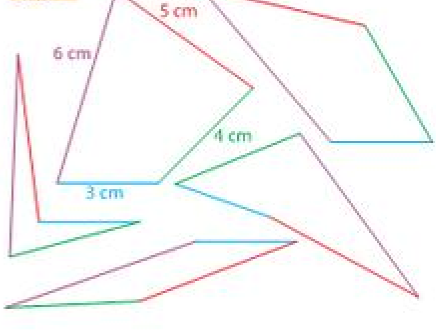
17/2 Napr. *OZAK*, *KAZO*, *ZOKA*, *ZAKO*. Uhlopriečky sú *KZ* a *OA*.

17/3 Zakaždým *EFGH*, *UVWZ*.

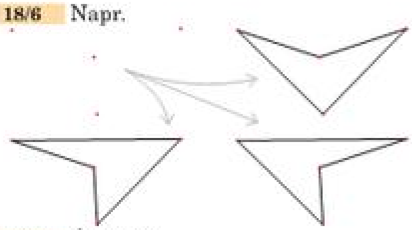
17/4 Napr:



18/5

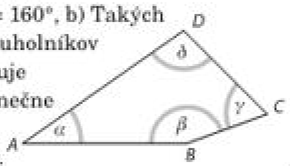


18/6 Napr.



18/9 Áno, má.

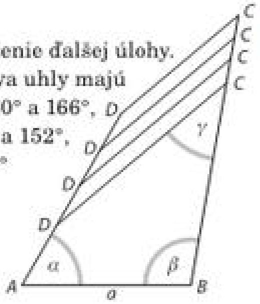
18/10 a) $\beta = 160°$, b) Takých štvoruholníkov existuje nekonečne veľa. Napr.



18/11 Pozri riešenie ďalšej úlohy.

18/12 Zvyšné dva uhly majú veľkosť: 60° a 166°, alebo 74° a 152°, alebo 113° a 113°.

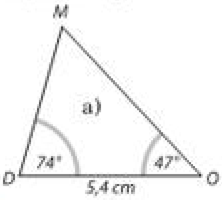
18/13



Malý návrat k trojuholníkom a uhlom

19/1 Trojuholníková nerovnosť: súčet dĺžok ľubovoľných dvoch strán musí byť väčší ako dĺžka tretej strany.

19/2 Trojuholník sa dá zostrojiť v častiach a), b) c). V častiach d), e), f) sa trojuholník nedá zostrojiť.

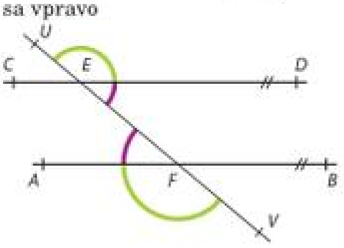


20/5 V trojuholníku je súčet uhlov vždy 180°, preto súčet dvoch z nich musí byť menší ako 180°. V prvých troch prípadoch úloha má riešenie, vo zvyšných troch nie.

Striedavé a súhlasné uhly

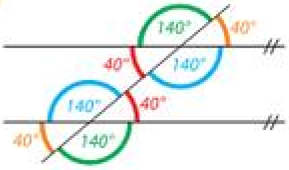
20/1 a) pretnú sa vpravo, b) pretnú sa vľavo, c) sú rovnobežné, d) pretnú sa vpravo

22/2



22/3 *CEU* a *AFE*, *UED* a *EFB*.

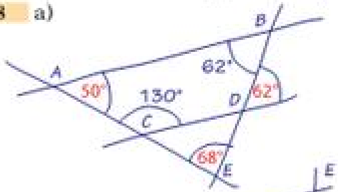
22/4



22/6 a) červený, fialový a svetlozelený uhol merajú každý 40°, zelený, modrý, žltý a oranžový uhol merajú každý 140°, b) $\omega = \gamma = \rho = 136°$, $\beta = \delta = \varepsilon = \phi = 44°$, c) $\gamma = \varepsilon = \alpha = 57°$, $\rho = \phi = \beta = 123°$.

22/7 Striedavé ani súhlasné uhly, ktoré sa nerovnajú, neexistujú.

23/8 a)



b)

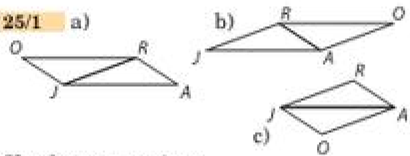
23/9 a) Nie sú rovnobežné. b) Sú rovnobežné.

23/10 123°

23/11 $\alpha = 32°$, $\beta = 131°$, $\gamma = 17°$, $\delta = 17°$.

Rovnobežníky

25/1 a) b) c)



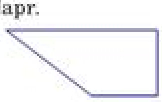
Kreslíme a rysujeme

25/6 Trojuholníky *FSO* a *ESR*.

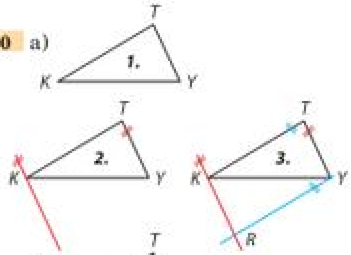
26/7 Rovnaké sú strany *AL* a *IC* podľa zadania. Rovnaké sú aj strany *LI* a *CA*, tiež podľa zadania. Obidva trojuholníky majú spoločnú stranu *LC* – uhlopriečku štvoruholníka.

26/8 Trojuholníky *ALC* a *ICL* sú zhodné podľa vety sss. Potom aj uhly *ALC* a *ICL* sú zhodné. Sú to striedavé uhly, preto sú priamky *AL* a *IC* rovnobežné.

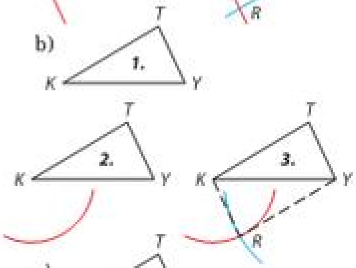
26/9 Napr.



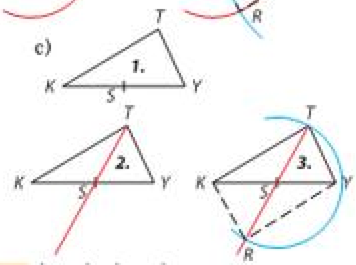
27/10 a)



b)



c)



27/11 $|AS| = |CS|$, pretože obidve strany sú polovicou uhlopriečky *AC*, $|BS| = |DS|$, lebo obe strany sú polovicou uhlopriečky *BD*, $|AB| = |CD|$, pretože sú to protiľahlé strany v rovnobežníku, $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD|$, pretože sú to vrcholové uhly, $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle CDS|$, keďže sú to striedavé uhly, $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SCD|$, lebo sú to striedavé uhly.

Rozdelenie rovnobežníkov

27/1 Štvorec je na obrázku číslo 1. Obdĺžniky sú na obrázkoch číslo 1 a 4. Kosodĺžniky sú na obrázku 2, 3, 5 a 6. Kosoštvorce sú na obrázkoch 2 a 6.

28/2 Ak v rovnobežníku pre tieto trojuholníky platí, že sú rovnoramenné, je to obdĺžnik.
Ak v rovnobežníku pre tieto trojuholníky platí, že sú pravouhlé, je to kosoštvorec alebo štvorec.
Ak v rovnobežníku pre tieto trojuholníky platí, že sú rovnoramenné a pravouhlé, je to štvorec.

28/3 Ak v rovnobežníku pre uhlopriečky platí, že sú rovnako dlhé, je to obdĺžnik.
Ak v rovnobežníku pre

uhlopriečky platí, že sú na seba kolmé, je to kosoštvorec alebo štvorec.
Ak v rovnobežníku pre uhlopriečky platí, že sú rovnako dlhé a na seba kolmé, je to štvorec.

28/4 Ak je rovnobežník osovo súmerný podľa priamok spájajúcich stredy protiľahlých strán, je to obdĺžnik. Ak je rovnobežník osovo súmerný podľa uhlopriečok, je to kosoštvorec alebo štvorec. Ak je rovnobežník osovo súmerný podľa priamok spájajúcich stredy protiľahlých strán a podľa uhlopriečok, je to štvorec.

28/5 Obdĺžnik, ktorý nie je štvorec: má všetky uhly pravé, má susedné strany rôznej dĺžky, má protiľahlé strany rovnako dlhé, má uhlopriečky rovnako dlhé, je osovo súmerný podľa priamok spájajúcich stredy protiľahlých strán.

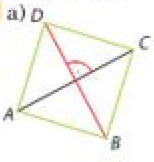
28/6 Kosoštvorec: má uhly iné ako pravé, má všetky strany rovnako dlhé, má uhlopriečky na seba kolmé, je osovo súmerný podľa uhlopriečok.

28/7 Štvorec: má všetky uhly pravé, má všetky strany rovnako dlhé, má uhlopriečky rovnako dlhé a na seba kolmé, je osovo súmerný podľa priamok spájajúcich stredy protiľahlých strán aj podľa uhlopriečok.

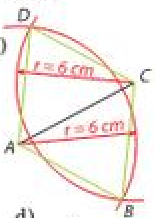
28/8 Kamil neuvažoval správne. Na obrázku môže byť rovnobežník, ktorý nie je obdĺžnikom. Aby sme mali istotu, že na obrázku je obdĺžnik, len pomocou merania dĺžok, musíme odmerať aj dĺžku oboch uhlopriečok a tieto dĺžky sa musia rovnať.

29/9 a) 0 alebo 4, b) 0 alebo 2, c) 0 alebo 2

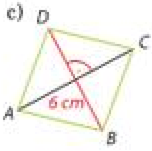
29/10 a)



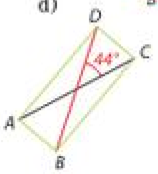
b)



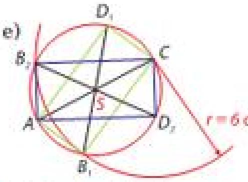
c)



d)

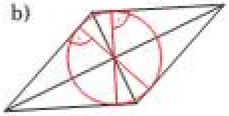


e)



29/11 a) Nemá riešenie.
b) Nemá riešenie.

29/12 a) Nemá riešenie (Riešenie existuje, iba ak by to bol kosoštvorec – pozri časť b)).
b)



Lichobežník

30/2 Lichobežník ja na obrázku a) a c). Na obrázku b) je rovnobežník. Na obrázku d) je obdĺžnik.

30/3 a) 0 alebo 2, b) 0, 1 alebo 2, c) 0, 1 alebo 2

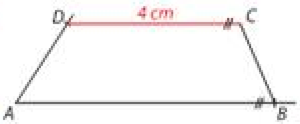
30/4 Áno, má pravdu.

31/7 Uhly vyznačené na obrázku modrou farbou sú zhodné, pretože sú striedavé. Súčet modrého a červeného uhla je 180°, lebo sú susedné. Aj súčet modrého a červeného uhla pri jednom ramene je preto 180°.

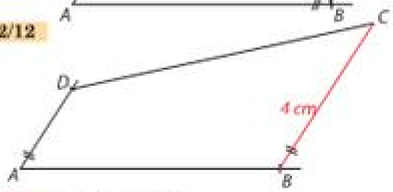
31/8 a) Uhly *EAB* a *EDC* sú súhlasné. Rovnako aj uhly *EBA* a *ECD* sú súhlasné. Keďže trojuholník *ABE* je rovnoramenný, sú uhly *EAB* a *EBA* rovnaké. Preto sú aj uhly *EDC* a *ECD* rovnaké. Takže trojuholník *DCE* je rovnoramenný. b) Keď od rovnakých strán *AE* a *BE* odoberieme rovnaké úsečky *DE* a *CE*, dostaneme rovnako dlhé úsečky *AD* a *BC*. A to sú ramená lichobežníka *ABCD*.

32/10 Zhodujú sa v prepone, odvesne a v pravom uhle.

32/11

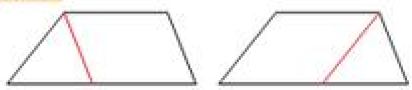


32/12

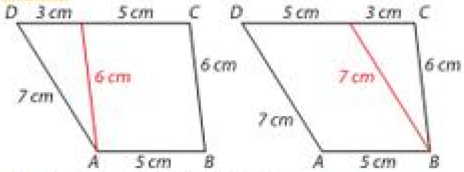


32/13 a) áno, b) nie.

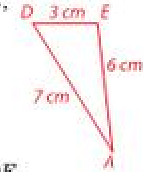
33/14



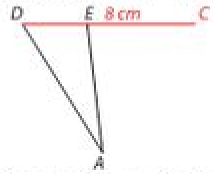
33/15



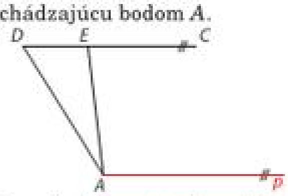
33/16 1. Trojuholník *ADE*, $|AD| = 7$ cm, $|AE| = 6$ cm, $|DE| = 3$ cm.



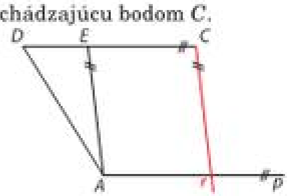
2. Na polpriamke *DE* bod *C*, tak že $|DC| = 8$ cm.



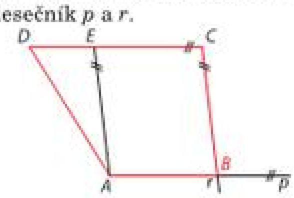
3. Rovnobežku *p* s úsečkou *CD* prechádzajúcu bodom *A*.



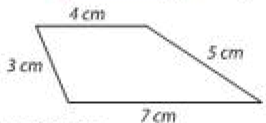
4. Rovnobežku *r* s úsečkou *AE* prechádzajúcu bodom *C*.



5. Lichobežník *ABCD*, bod *B* je priesečník *p* a *r*.

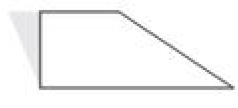


33/17 a)



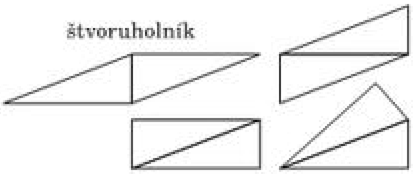
b) Nemá riešenie.

33/18

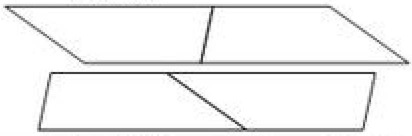


Tangram a iné skladačky

33/1 2 rovnobežníky, 1 rovnobežník – obdĺžnik, 1 všeobecný štvoruholník

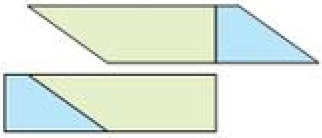


33/2 Sú dve rôzne riešenia. Ak je pôvodný lichobežník rovnoramenný, je len jedno riešenie.



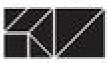
33/3 Protiľahlé strany sú rovnako dlhé. Protiľahlé uhly sú rovnako veľké.

33/4



34/6 Dva rovnaké veľké pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, dva rovnaké malé pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, jeden stredne veľký pravouhlý rovnoramenný trojuholník, jeden štvorec a jeden rovnobežník.

34/9 a)



b)

c)

d)

34/10

Šanca a pravdepodobnosť

Tombola

36/3 a) Približne za 1,32 €. Ak budú predávať lístky za 1,50 €, môžu mať zisk 100 €, aj keď nepredajú všetky lístky. b) Približne 2,06 €. Ak budú predávať lístky za 2,10 €, môžu mať zisk 100 €, aj keď nepredajú 160 lístkov. c) Aspoň 165 lístkov.

37/8 Vo Vierinej tombole je 400 : 160 = = 2,5-krát menej lístkov, teda 400 : 160 = 2,5-krát väčšia šanca na výhru. To by platilo, keby si obidvaja kúpili rovnaký počet lístkov. Viera si ich kúpila 2-krát menej, jej šanca sa preto 2-krát zmenší: 2,5 : 2 = 1,25. Viera má 1,25-krát väčšiu šancu na výhru ako Peter.

37/9 Presne 100-krát.

37/10 a) 50, b) 25 €

37/11 Menšiu šancu má Jano. Jeho šanca je 2-krát menšia.

37/12 Väčšiu šancu uhádnuť má Jano.

37/13 a) 2-krát, b) 3-krát, c) 12-krát, d) 88-krát, e) 200-krát

Pravdepodobnosť

38/2 a) Ak kúpim všetky lístky. b) Ak nemám kúpený ani jeden lístok.

38/3 186

39/6 a) 2 . 0,005 = 0,01; b) 0,015; c) 0,025; d) 0,06; e) 0,22.

39/7 a) Zmenšia sa 2,5-krát:
a) 0,004; b) 0,006; c) 0,01; d) 0,024; e) 0,088,
b) Zväčšia sa 1,25-krát:
a) 0,012 5; b) 0,018 75; c) 0,031 25; d) 0,075; e) 0,275,
c) Zmenšia sa 1,5-krát: a) 0,00$\overline{6}$; b) 0,01; c) 0,01$\overline{6}$; d) 0,04; e) 0,14$\overline{6}$

39/8 0,027 343...

39/9 V prvej tombole je pravdepodobnosť výhry prvej ceny 0,015. V druhej je 0,014 705... Väčšia je pravdepodobnosť výhry v prvej tombole, i keď iba nepatrne.

40/10 a) $\frac{3}{50}$ = 0,06, b) $\frac{5}{80}$ = 0,062 5, c) Väčšiu šancu vyhrať má Milan.

41/11 a) Zita: $\frac{7}{50}$ = 0,14, Milan: $\frac{11}{80}$ = = 0,137 5, väčšiu šancu vyhrať má Zita, b) Zita: $\frac{16}{50}$ = 0,32, Milan: $\frac{26}{80}$ = 0,325, väčšiu šancu vyhrať má Milan.

41/12 a) 25 lístkov, b) 5 lístkov, c) 13 lístkov.

Ktoré číslo padá najčastejšie?

Spolu bolo 1 200 hodov, v triede je preto 1 200 : 50 = 24 žiakov. Priemerný počet bodiek bol 4 178 : 1 200 ≐ 3,481 667.

Na koľký pokus padá číslo 6 na kocke najčastejšie?

42/2 a) Šestka môže padnúť na prvý raz. b) Michal hádzal až 18–krát, kým mu padla šestka. Musel niekto vo vašej triede hádzať dlhšie ako Michal, kým mu padla šestka?

43/5 Zakaždým $\frac{1}{6}$.

43/6 a) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, b) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, c) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

43/7 a) 0,$\overline{6}$, b) 0,5

44/8 Ak nič nepokazí, tak s pravdepodobnosťou 1.

Hádžeme mincami

46/1 a) $\frac{1}{2}$ = 0,5, b) $\frac{1}{2}$ = 0,5. Opäť sme predpokladali, že ani minca nemôže padnúť na hranu.

46/2 a) $\frac{1}{4}$ = 0,25, b) $\frac{1}{4}$ = 0,25, c) $\frac{1}{2}$ = 0,5, d) $\frac{1}{4}$ = 0,25.

46/3 Nezmenilo by sa, ale prípady b) a d) by sa ťažko rozlišovali.

46/4 a) $\frac{1}{8}$ = 0,125, b) $\frac{1}{8}$ = 0,125, c) $\frac{3}{8}$ = 0,375.

Hráme sa ďalšie hry

46/1 $\frac{3}{8}$ = 0,375

46/2 $\frac{3}{8}$ = 0,375

46/3 $\frac{3}{8}$ = 0,375

48/9 Karol vypisoval postupne ku guľôčke C1 všetky guľôčky, ktoré s ňou môžu byť vytiahnuté. Potom pokračoval guľôčkou C2, po nej C3, atď.

49/10 Možnosti C1 + C2 a C2 + C1 sú rovnaké, lebo by sme vytiahli presne tie isté guľôčky. Boženin postup by sa tiež dal použiť – keby sme si napr. predstavili, že guľôčky vyťahujeme postupne, teda najprv jednu a potom druhú. Vtedy by sa každá možnosť objavila dva razy. Celkový výsledok by to však neovplyvnilo.

49/12 Všetkých možností je 21. „Petrových" možností je 9. Hra je opäť nespravodlivá pre Petra.

49/13 Všetkých možností je 36. „Petrových" možností je 18. Hra je pre obidvoch rovnako spravodlivá.

Vyberáme skupiny

50/1 a) Najskôr sa z 5 lístkov D1, D2, D3, D4, D5 vylosuje 1 dievča. V druhom kole sa z 8 lístkov C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8 vylosuje 1 chlapec. Spolu treba 13 lístkov. b) Keďže sa má losovať iba raz, na lístkoch musia byť všetky možnosti. Lístkov bude 40:

C1 D1	C2 D1	C3 D1	C4 D1	C5 D1	C6 D1	C7 D1	C8 D1
C1 D2	C2 D2	C3 D2	C4 D2	C5 D2	C6 D2	C7 D2	C8 D2
C1 D3	C2 D3	C3 D3	C4 D3	C5 D3	C6 D3	C7 D3	C8 D3
C1 D4	C2 D4	C3 D4	C4 D4	C5 D4	C6 D4	C7 D4	C8 D4
C1 D5	C2 D5	C3 D5	C4 D5	C5 D5	C6 D5	C7 D5	C8 D5

50/3 Väčšia je šanca, že vylosujú Evu (0,2) ako to, že vylosujú Adama (0,125).

50/5 $\frac{6}{8} = 0{,}75$

50/6 $\frac{3}{5} = 0{,}6$

51/7 Napr.: 1. spôsob:
Vylosovať 1 chlapca zo 4 lístkov. Potom vylosovať 1 dievča zo 7 lístkov. Nakoniec vylosovať druhé dievča zo zostávajúcich 6 lístkov.
2. spôsob:
Vylosovať 1 chlapca zo 4 lístkov. Potom vylosovať jednu dvojicu dievčat z pripravených 21 lístkov so všetkými možnými dvojicami dievčat.

51/9 $\frac{1}{14}$

51/10 Napr.: 1. spôsob:
Vylosovať 1 dievča zo 7 lístkov. Potom vylosovať 1 chlapca zo 4 lístkov. Nakoniec vylosovať druhého chlapca zo zostávajúcich 3 lístkov.
2. spôsob:
Vylosovať 1 dievča zo 7 lístkov. Potom vylosovať jednu dvojicu chlapcov z pripravených 6 lístkov so všetkými možnými dvojicami chlapcov.

51/11 Eva má šancu $\frac{1}{7}$, čo je približne 0,14. Adam má šancu $\frac{3}{6}$, čiže presne 0,5. Adam má teda omnoho väčšiu šancu byť vylosovaný ako Eva.

51/12 $\frac{3}{42} = 0{,}071...$

52/13 Napr.: Na lístky napíšeme mená 5 dievčat a 5 chlapcov. Z 5 lístkov s menami dievčat vylosujeme dva a z 5 lístkov s menami chlapcov vylosujeme tri.

52/14 Väčšia je šanca, že vylosujú Adama.

52/15 Väčšia je šanca, že nevylosujú Evu.

Hazardné hry

53/4 a) $\frac{1}{36}$. V oboch hrách muselo padnúť číslo 6. b) $\frac{25}{36}$. Ani v jednej hre nesmelo padnúť číslo 6. c) Nie je to možné (sú len možnosti 18, –2 a 8). Pravdepodobnosť je 0.

53/6 Zuzana má pravdu. Je 36 možností:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

53/8 a) $\frac{11}{36}$, b) $\frac{11}{36}$, c) $\frac{1}{36}$, d) $\frac{1}{36}$, e) $\frac{1}{36}$

54/9 $\frac{1}{5\,000} = 0{,}000\,2$

54/10 Organizátor zarobí
a) 2 € · 100 = 200 €, b) 2 000 €,
c) 10 000 € – 3 333 € = 6 667 €,
d) 12 667 €, e) 18 234 €.

54/11 Nemá. Jedna SMS v hre o mobil stojí až 8 €, nie 2 €. Takže ak pošle 50 SMS, minie až 400 €.

54/12 Okrem neho posielali SMS aj iní hráči, takže sa mohlo stať, že ani jedna z jeho esemesiek nebola presne 50. v poradí.

Párne či nepárne?

55/4 a) b) Riešenie je rovnaké ako pri možnosti PP. c) Aby vyhralo PNN, musíme najskôr hodiť P. Keďže sme už hodili NN, buď budeme hádzať ešte veľakrát N a na konci P (v tomto prípade vyhrá NNP), alebo hneď hodíme P (tiež vyhrá NNP).

55/5 Možnosť PNN má trikrát väčšiu šancu ako možnosť NNP.

55/6 a) Možnosť NP má trikrát väčšiu šancu ako možnosť PP.
b) Možnosti PP a PN majú rovnakú šancu.

Obsah geometrických útvarov

Výška a obsah rovnobežníka

56/3 v_{BC}, v_{AD}, v_b, v_d

57/5 a) 1 cm a 5 cm, b) 2 cm a 4 cm.

57/6 1 cm alebo 7 cm.

57/7 7 cm alebo 1 cm.

57/8 Čiernou sú narysované dané priamky, červenou riešenie úlohy.

57/9

57/10 a) 28 cm², b) 13,12 dm², c) 768 mm² alebo 7,68 cm².

57/11 a) 1 312 cm², b) 131 200 mm², c) 0,131 2 m².

57/12 Obsah je a) 2 392 m², b) 23,92 a, c) 0,239 2 ha.

57/13 a) 2,25 cm², b) 4,5 cm², c) 10 cm².

57/14 a) 13,5 cm², b) 30 cm².

57/15 Najmenší obsah má pravouhlý trojuholník na obrázku d), najväčší obsah má obdĺžnik na obrázku b).

58/17 Asi 45 cm².

58/19 Zhodujú sa vo všetkých troch uhloch (jeden uhol majú pravý, druhá dvojica je rovnaká, lebo sú to protiľahlé uhly rovnobežníka). Okrem toho sa zhodujú v dĺžke prepony (protiľahlé strany rovnobežníka). Takže sú zhodné podľa vety usu.

58/20 Obsah má vyjsť rovnaký: približne 45 cm².

58/21 Presne 18 cm².

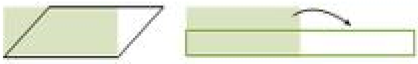
59/22 Preto, lebo obidva útvary sa skladajú z rovnakých útvarov: z modrého obdĺžnika a z červeného a zo zeleného trojuholníka.

59/23 a) 12 cm², b) 15,75 cm², c) 15 cm².

59/25 Meranie strán a výšok je nepresné, preto pri použití dvoch spôsobov môžu vo vypočítaných obsahoch vzniknúť odchýlky.

59/26

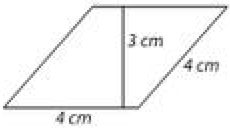
60/27 Napr.:
1. krok: 2. krok:



60/28 Peter určite nemeral správne v časti a), c) a d).

60/29 a) 1,562 5 cm, b) 3,6 cm, c) približne 1,108 cm, d) približne 7,352 cm.

60/30 Obsah je 4 cm · 3 cm = 12 cm².



60/31 Pozri zadanie úlohy 58/21.

Obsah trojuholníka

62/2 a) približne 5,3 cm², b) približne 23 cm², c) 7,5 cm².

62/4 10 cm, 10 cm, 4,5 cm, 3,7 cm, napr. 6 cm a 4 cm.

62/8 Áno.

Obsah lichobežníka

64/2 a) 9 cm², b) 13,68 cm².

64/3 19,575 cm², 22,325 dm², 13,44 cm², 39,9 dm², 31,16 cm².

64/4 Hnedý trojuholník: 6 cm²,
zelený trojuholník: 12,5 cm²,
zelený lichobežník: 5 cm²,
žltý trojuholník: 10,5 cm²,
červený rovnobežník: 10 cm²,
ružový rovnobežník: 12 cm²,
modrý lichobežník: 24 cm².

64/5 červený trojuholník: 24 cm²,
žltý trojuholník: 12 cm²,
fialový „deravý" mnohouholník: 32,5 cm²,
modrý štvoruholník: 18 cm².

Výrazy, vzorce a rovnice

65/1 a) S = 78,2 cm², b) S = 301 cm².

65/2 a) V = 29,791 cm³, P = 57,66 cm², b) V = 351 cm³, P = 519,6 cm².

66/4 a) $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ cm²,

b) $\frac{8{,}5 \cdot 5{,}4}{2} = 22{,}95$ m².

66/5 $\frac{68 \cdot 52}{2} = 1\,768$ mm².

66/6 $8 \cdot 5{,}5 = 11 \cdot 4 = 44$ cm².

66/7 $S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2} = \frac{4{,}4 \cdot 6}{2} = 13{,}2$ dm².

67/10 Úloha má dve riešenia:
1. riešenie: ak 6 cm meria rameno: 21 cm – 6 cm – 6 cm = = 9 cm.
2. riešenie: ak 6 cm meria základňa: 21 cm – 6 cm = 15 cm, 15 cm : 2 = 7,5 cm.

67/12 Áno.

67/13 21 = 6 + 6 + c alebo 21 = 6 + c + c.

Rovnice na súčet a rozdiel

Rovnice, kde neznáma je jeden zo sčítancov

69/1 a) 6, b) 12, c) 127, d) 216, e) 8 596, f) 7 720, g) 58 962, h) 302 108

69/2 a) a = 28, b) b = 5,8, c) c = 286,11, d) d = 19,35, e) e = 3 004,32, f) f = 42 277,8

69/4 a) s = 304, b) x = 188,9, c) z = 26,2

70/5 a) a = –4, b) b = –57, c) c = –43,4, d) d = 31, e) e = –155,2, f) f = 71

70/6 a) $\frac{1}{4}$, b) $-\frac{1}{33}$, c) $-\frac{37}{14}$, d) $\frac{5}{22}$

70/8 a) 78 + h = 405; h = 327,
b) h + 345 = 200; h = –145,
c) h + 12,7 = 8,91; h = –3,79,
d) h + 102 = 200, h = 98.

70/10 Počet loptičiek si označíme l. Podľa zadania platí, že $l + 3 \cdot 6 =$ = 50, takže l + 18 = 50. Riešením je l = 32.

70/11 9 946,24 €.

Rovnice, kde neznáma je menšiteľ

71/1 a) 11, b) 273, c) 1 304, d) 18 038

71/2 a) a = 125, b) b = 6,65, c) c = 5 701, d) d = 1 553,5

71/3 a) s = 875, b) n = 408,6, c) K = 56,367

71/4 a) a = 45, b) b = –29, c) c = –9,
d) d = –1,06 , e) $e = -\frac{7}{10}$, f) $f = -\frac{47}{56}$,
g) $g = -\frac{34}{55}$, h) $h = -\frac{23}{36}$

71/6 a) 211 – h = 308; h = –97,
b) 345 – h = 88; h = 257,
c) 12,86 – h = 0,47; h = 12,39,
d) 2 308 – h = 1 208; h = 1 100

71/7 2 543 – g = 2 098; g = 445

Rovnice, kde neznáma je menšenec

72/1 a) 87, b) 527, c) 3 334, d) 79 623

72/3 a) a = 699, b) b = 18,95, c) c = 7 775, d) d = 6 081,3

72/4 a) s = 949, b) n = 1 010, c) K = 99,707

72/5 a) a = 29, b) b = –53, c) c = 45,
d) d = –7,3, e) $e = \frac{23}{10}$, f) $f = \frac{33}{56}$,
g) $g = \frac{56}{55}$, h) $h = \frac{7}{36}$

72/7 a) h – 4,16 = 32,7; h = 36,86,
b) h – 345 = –8; h = 337,
c) h – 38,902 = 21,07; h = 59,972,
d) h – 51 = 72, h = 123.

72/8 n – 19 = 48; n = 67.

73/9 a) q = 31,41, b) p = –23,79, c) r = –23,79, d) s = 23,79, e) k = 0,5, f) l = 0,5, g) m = 1, h) n = 0,5

73/10 a) h + 37 = 508 alebo h = 508 – 37, h = 471, b) h – 238 = 560, h = 798, c) 1 067 – h = 888, h = 179, d) h – 37 = 508 alebo h = 508 + 37, h = 545, e) h + 238= 560, h = 322.

Marcelova pomôcka

74/2 Marcelov objav platí.

74/3 a) –16, b) 323, c) 824, d) 37

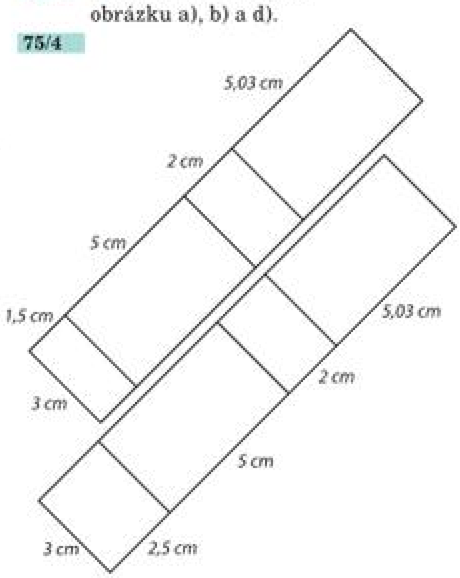
74/4 a) a = –2,3, b) b = 12,8,
c) c = 674,7, d) d = –24,1,
e) e = 1,325, f) $f = -\frac{5}{6}$,
g) g = 0,625, h) h = 0,05

74/5 a) x – 23,8 = 17,2; x = 41,
b) 23,8 + x = 17,2; x = –6,6,
c) x + 23,8 = 17,2; x = –6,6,
d) 23,8 – x = 17,2; x = 6,6.

Hranoly II

75/1 Hranoly sú útvary na obrázku a), b) a d).

75/4



Povrch hranola

76/2 Podstava je lichobežník. Jeho obsah je $\frac{(3+1)\cdot 5}{2} = 10\ \text{cm}^2$.
Bočné steny sú obdĺžniky. Ich obsah spolu je 3 cm · 2 cm + 5 cm · · 2 cm + 1 cm · 2 cm + 5,4 cm · · 2 cm = 28,8 cm². Povrch hranola je potom $P = 2 \cdot 10\ \text{cm}^2 + 28{,}8\ \text{cm}^2 = 48{,}8\ \text{cm}^2$.

77/5 a) 168 cm², b) 150 cm², c) 268 cm².

77/6 56 cm².

77/7 Pozri riešenie nasledujúcej úlohy.

77/8 Ak je podstava štvorec s obvodom 18 cm, jedna jeho strana meria 4,5 cm. Výška hranola je potom 8 cm. Jeho povrch je 184,5 cm². Ak je podstava štvorec s obvodom 8 cm, jedna jeho strana meria 2 cm. Výška hranola je potom 18 cm. Jeho povrch je 152 cm².

77/9 a) 36 cm², b) približne 155,1 cm².

77/10 Približne 86,5 cm².

78/11 Približne 26 €.

Objem hranola

78/1 256 cm³ a 128 cm³.

78/2 288 cm³ a 96 cm³.

78/3 120 cm³.

78/4 a) 600 cm³, b) 6 cm³, c) 150 cm³, d) 24 cm³.

79/8 Približne 28 cm³.

79/9 20 cm³.

79/10 a) 12 cm³, b) približne 124,7 cm³.

80/11 41,25 cm³.

80/12 Úloha 5: a) 120 cm³, b) 108 cm³, c) 252 cm³, úloha 6: 24 cm³, úloha 7: 162 cm³ alebo 72 cm³.

80/13 Objem bazéna je 600 m³ = 600 000 litrov. Naplní sa za 600 000 : : 5 000 = 120 minút = 2 hodiny.

80/14 30,8 cm.

80/15 Približne 225,6 cm³.

80/16 Približne 244,8 cm³.

80/17 Zväčšil by sa a) 4-krát, b) 8-krát.

Kružnica a kruh II

Dĺžka kružnice a obvod kruhu

81/4 Vpísané útvary: najmenší obvod má trojuholník, najväčší obvod má dvanásťuholník. Opísané útvary: najväčší obvod má trojuholník, najmenší obvod má dvanásťuholník.

83/6 a) $8 \cdot \pi$ cm ≐ 25,12 cm,
b) $12 \cdot \pi$ cm ≐ 37,68 cm,
c) $4 \cdot \pi$ cm ≐ 12,56 cm,
d) $6 \cdot \pi$ cm ≐ 18,84 cm.

84/7 a) $2 \cdot \pi \cdot 3$ cm ≐ 18,84 cm,
b) $2 \cdot \pi \cdot 5$ cm ≐ 31,4 cm,
c) $3 \cdot \pi$ cm ≐ 9,42 cm,
d) $5 \cdot \pi$ cm ≐ 15,7 cm.

84/8 a) r = 3,5 cm, b) 2,2 dm, c) 3,4 mm.

84/9 a) $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{22}{7} \doteq 3{,}14$ m,
b) $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{88}{21} \doteq 4{,}19$ m.

84/10 a) 80,855 mm, b) 73,005 mm.

84/13 1. spôsob: $\frac{y}{12{,}56} = \frac{290}{360}$, takže
$y = 12{,}56 \cdot \frac{290}{360} \doteq 10{,}12$ cm.
2. spôsob: 12,56 cm – 2,44 cm = = 10,12 cm.

85/14 a) 31,4 cm, b) 15,7 cm, c) 6,28 cm, d) 3,31 cm, e) 59,49 cm.

85/15 a) 50 m + 50 m + 78,5 m = = 178,5 m,
b) 50 m + 50 m + 81,64 m = = 181,64 m.
Zabehol by viac o 3,14 metra.

85/16 a) 219,8 cm, b) 204,1 cm, c) 207,3656 cm, d) 207,365 6 cm, e) 215,341 2 cm

85/17 Sú rovnako dlhé.

Obsah kruhu

Experiment 2
Obsahy by mali vyjsť približne a) 1 250 mm², b) 5 000 mm², c) 20 000 mm².

87/1 Obsahy sú: 314 mm², 1 256 mm², 5 024 mm², 20 096 mm².

87/3 a) 7,065 cm², b) 28,26 cm², c) 113,04 cm², d) 452,16 cm².

88/5 19,625 dm².

88/6 1 384,74 cm².

88/7 a) 226,08 cm², b) 113,04 cm².

88/8 Obsah celého kruhu je 3,14 · 11 · 11 ≐ 379,94 dm². Obsah príslušného výseku vypočítame priamou úmernosťou:
360° ..... 379,94 dm²
70° ...... x dm²
$x = 379{,}94 \cdot \frac{70}{360} \doteq 73{,}88\ \text{dm}^2$.
Takže

88/9 $S = \pi \cdot r \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$

88/10 Výsledok je rovnaký v časti a) aj v časti b) a to: obsah veľkého kruhu – obsah malého kruhu = 615,44 cm² – 200,96 cm² = = 414,48 cm².

88/11 1 740,625 m².

88/12 Približne 1,45 cm².

Výrazy, vzorce a rovnice II

Rovnice na súčin a podiel

Rovnice, kde neznáma je jeden z činiteľov

89/1 a) 6, b) 4, c) 4, d) 32, e) 11, f) 41, g) 14, h) 101

89/2 a) $a = 2$, b) $b = 1{,}8$, c) $c = 4$, d) $d = 6{,}01$, e) $e = 6{,}4$, f) $f = 12{,}37$

90/4 a) $s = 23$, b) $x = 0{,}04$, c) $z = 0{,}000\,625$

90/5 a) $a = -0{,}5$, b) $b = 6$, c) $c = -1$, d) $d = 7$, e) $e = 0{,}5$, f) $f = -0{,}125$

90/6 a) 2, b) $\frac{1}{2}$, c) $-\frac{3}{8}$, d) $\frac{11}{6}$

90/8 a) $0{,}2 \cdot h = 2{,}8$; $h = 14$,
b) $h \cdot 14{,}2 = -0{,}426$; $h = -0{,}03$,
c) $h \cdot 2\,300 = 1\,150$; $h = 0{,}5$,
d) $h \cdot 10 = 200$, $h = 20$.

90/10 Cenu za 1 meter látky si označíme c. Podľa zadania platí, že: $c \cdot 8{,}5 = 38{,}25$, takže $38{,}25 : 8{,}5 = c$.
Riešením je $c = 4{,}5$. Jeden meter látky stojí 4,50 €.

Rovnice, kde neznáma je deliteľ

91/1 a) 4, b) 7, c) 201, d) 8 056

91/2 a) $a = 0{,}2$, b) $b = 0{,}11$, c) $c = 3{,}14$, d) $d = 6{,}08$

91/3 a) $s = 205$, b) $n = 5{,}71$, c) $K = 911$

91/4 a) $a = -8$, b) $b = 4$, c) $c = -0{,}5$, d) $d = -7{,}4$, e) $e = -\frac{8}{9}$, f) $f = -\frac{7}{40}$, g) $g = -\frac{2}{9}$, h) $h = \frac{8}{15}$

91/6 a) $-3{,}92 : h = 2{,}8$; $h = -1{,}4$,
b) $1{,}024 : h = 32$; $h = 0{,}032$,
c) $6{,}82 : h = 40$; $h = 0{,}170\,5$,
d) $65\,536 : h = 12{,}8$; $h = 5\,120$.

91/7 $3\,718 : g = 286$; $g = 13$.

Rovnice, kde neznáma je delenec

92/1 a) 36, b) 122, c) 2 769, d) 288 472

92/3 a) $a = 2\,296$, b) $b = 17{,}172$, c) $c = 0{,}257\,52$, d) $d = 1\,877{,}76$

92/4 a) $s = 328$, b) $n = 38{,}151$, c) $K = 280{,}28$

92/5 a) $a = -296$, b) $b = 492$, c) $c = -486$, d) $d = 13{,}041\,6$, e) $e = 1{,}2$, f) $f = -\frac{5}{56}$, g) $g = \frac{9}{55}$,

h) $h = -\frac{5}{54}$

92/7 a) $h : 4{,}16 = 32{,}7$; $h = 136{,}032$,
b) $h : 345 = -8$; $h = -2\,760$,
c) $h : 38 = 21{,}07$; $h = 800{,}66$,
d) $h : 7 = 51$, $h = 357$.

92/8 $c : 3 = 2{,}50$ €; $c = 7{,}50$ €.

93/9 a) $q = 20{,}48$, b) $p = 0{,}5$, c) $r = 0{,}5$, d) $s = 2$, e) $k = 3$, f) $l = \frac{1}{3}$, g) $m = 0{,}187\,5$, h) $n = 3$

Druhá Marcelova pomôcka

94/2 Marcelov objav platí.

94/3 a) 3, b) 34,68, c) 200, d) 0,025

94/4 a) $a = -0{,}5$, b) $b = -74{,}1$, c) $c = -0{,}032$, d) $d = -\frac{1}{3}$, e) $e = 0{,}15$, f) $f = -\frac{1}{4}$, g) $g = \frac{1}{6}$, h) $h = 1{,}5$

94/5 a) $x : 4 = 0{,}5$; $x = 2$,
b) $x \cdot 4 = 0{,}5$; $x = 0{,}125$,
c) $4 : x = 0{,}5$; $x = 8$,
d) $4 \cdot x = 0{,}5$; $x = 0{,}125$.

Zložitejšie rovnice

95/3 a) $a = 62$, b) $b = 26$, c) $c = 8{,}5$, d) $d = -15$, e) $e = 11{,}3$, f) $f = -6{,}2$

97/9 a) $a = -5{,}5$, b) $b = 5{,}3$, c) $c = -6{,}9$, d) $d = 5{,}1$, e) $e = -21$, f) $f = 10{,}13$

97/10 a) $a = -0{,}1$, b) $b = -1{,}76$, c) $c = 3{,}2$, d) $d = 4{,}155$, e) $e = -18$, f) $f = 51{,}56$

97/11 a) $x = -0{,}011$, b) $x = -0{,}47$, c) $x = 21$, d) $x = -0{,}91$, e) $x = -491{,}9$, f) $x = 1\,603{,}25$

97/12 a) 3, b) –5, c) –27, d)10, e) –16,3, f) 7,2

98/14 Číslo 1 603,25 je koreňom danej rovnice.

Ďalšie slovné úlohy

99/3 Ostalo jej 64 eur.

99/4 78 kg

100/6 Áno, sú správne.

100/8 Dorka má 677 kariet a Svetlana má 563 kariet.

100/9 Adam má 36 plagátov a Tibor má 12 plagátov.

Slovné úlohy a kontrola ich riešení

101/2 Správne je 261.

101/3 261 je správne.

101/4 261 je správne.

102/5 Dorka má 324 kariet. Svetlana má 388 kariet.

102/7 Ani jedna možnosť nie je správna. Viera má 24 € a Lucia má 96 €.

102/8 Nie je to pravda.

102/9 Kandidát Milý získal 504 hlasov a kandidát Silný 252 hlasov.

102/10 Pán Jaroslav zarobí 650 € a pani Jana 780 €.

102/11 Jeden dostal 78 € a druhý dostal 130 €.

Konštrukcie mnohouholníkov

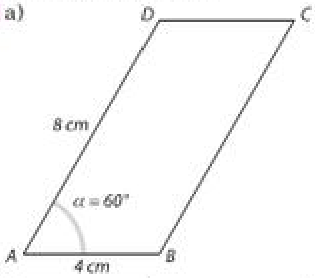
Rysujeme podľa návodu

104/2 (Pozri obr. 1)

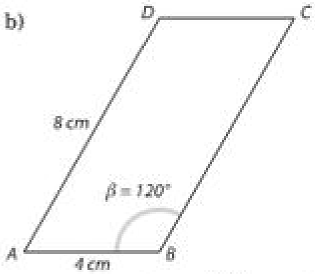
104/3 Pre každý bod B vzniknú dva body D, spolu teda budú štyri rôzne body D:
(Pozri obr. 2)

105/6 Všetky štyri sú rovnobežníky, vo všetkých štyroch majú úsečky AB aj BD správne dĺžky. Iba vo dvoch meria uhol DAB 48°.

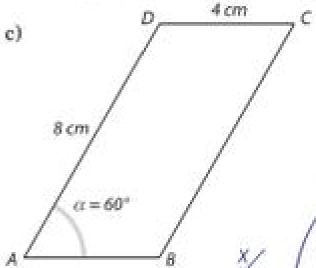
107/10 a)



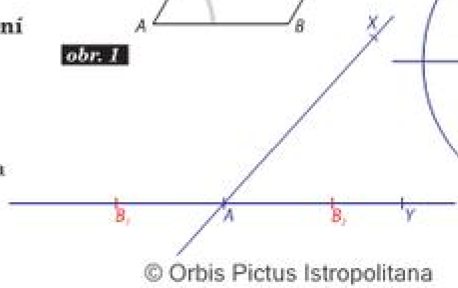
b)



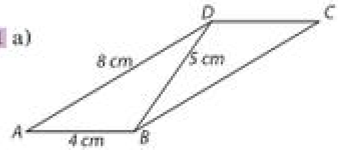
c)



obr. 1

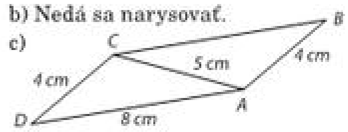


107/11 a)



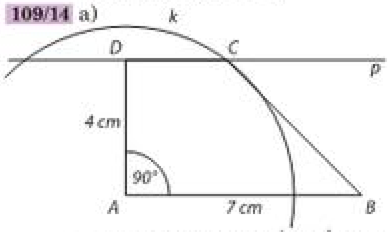
b) Nedá sa narysovať.

c)



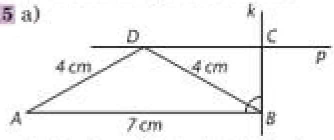
108/13 Áno, lebo súčet susedných uhlov pri spoločnom ramene v lichobežníku je 180°. Takže ak uhol ADC meria 70°, potom uhly DAB a ABC merajú 110°.

109/14 a)



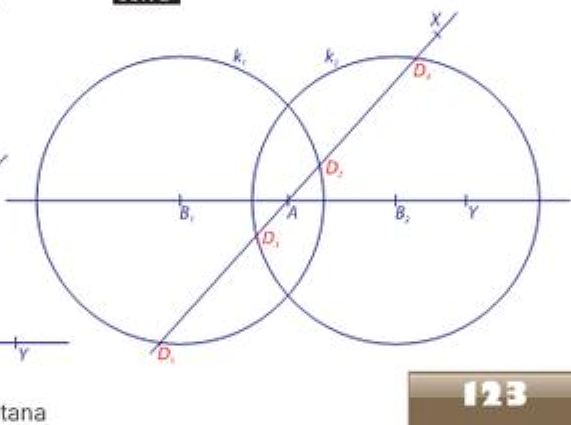
b) Dané mohlo byť: $|AB| = 7$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 90°$.
c) Jeden štvoruholník $ABCD$. Existuje ešte jeden priesečník kružnice k a priamky p, ale tak by vznikol štvoruholník $ABDC$ (teda štvoruholník s iným poradím vrcholov než požaduje zadanie).
d) Úloha má jedno riešenie.

109/15 a)



b) Dané mohlo byť: $|AB| = 7$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|BD| = 4$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 90°$.
c) Jeden štvoruholník $ABCD$.
d) Úloha má jedno riešenie.

obr. 2



Dokončujeme konštrukcie

110/1 Napr.: Reštaurovať – uviesť do pôvodného stavu, obnoviť.
Reštaurátor – ten, kto reštauruje.

111/9 Lebo úlohou bolo zostrojiť lichobežník $ABCD$.
V lichobežníku ABD_2C_2 nie je správne poradie vrcholov.

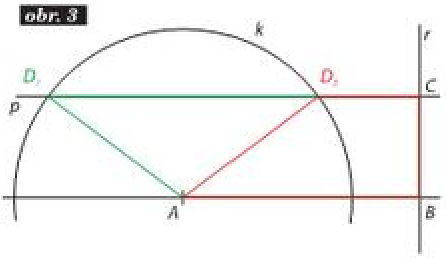
111/10 **1.** Kružnica k so stredom v bode A a polomerom 5 cm.
2. Bod D, ktorý leží v priesečníku priamky p a kružnice k.
3. Priamka r kolmá na priamku AB prechádzajúca bodom B.
4. Bod C, ktorý leží v priesečníku priamok r a p.
5. Pravouhlý lichobežník $ABCD$.
Obrázok: (Pozri obr. 3)
Úloha má dve riešenia: $ABCD_1$ a $ABCD_2$.

112/11 a) Postup konštrukcie:
1. Kružnica k so stredom v bode A a polomerom 5 cm.
2. Bod C, ktorý leží v priesečníku priamky p a kružnice k.
3. Kružnica l so stredom v bode A a polomerom BC.
4. Bod D, ktorý leží v priesečníku priamky p a kružnice l.
5. Rovnoramenný lichobežník $ABCD$.
Obrázok: (Pozri obr. 4)
Úloha má jedno riešenie. Síce vzniknú dva body C_1 a C_2 (pozri obrázok), ale pre bod C_2 sa nedá dorysovať rovnoramenný lichobežník.
b) Postup konštrukcie:
1. Kružnica k so stredom v bode A a polomerom 5 cm.
2. Bod C, ktorý leží v priesečníku priamky p a kružnice k.
3. Priamka r kolmá na AB prechádzajúca cez bod A.
4. Bod D, ktorý leží v priesečníku priamok p a r.
5. Pravouhlý lichobežník $ABCD$. Obrázok: (Pozri obr. 5)
Úloha má jedno riešenie.
c) Postup konštrukcie:
1. Kružnica k so stredom v bode A a polomerom 5 cm.
2. Bod C, ktorý leží v priesečníku priamky p a kružnice k.
3. Priamka r rovnobežná s priamkou BC prechádzajúca cez bod A.
4. Bod D, ktorý leží v priesečníku priamok p a r.
5. Rovnobežník $ABCD$.
Obrázok: (Pozri obr. 6)
Úloha má dve riešenia: rovnobežníky ABC_1D_1 a ABC_2D_2.

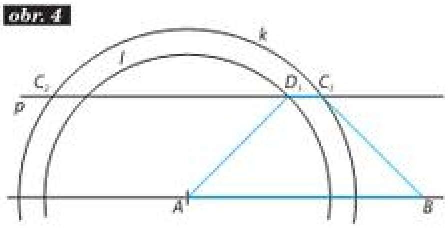
112/12 a) Postup konštrukcie:
1. Kružnica k so stredom v bode A s polomerom 5 cm.
2. Bod B, ktorý je priesečníkom priamky p a kružnice k.
3. Priamka r kolmá na priamku BC, ktorá prechádza cez bod C.
4. Priamka s rovnobežná s priamkou BC prechádzajúca bodom A.
5. Bod D, ktorý je priesečníkom priamok r a s.
6. Pravouhlý lichobežník $ABCD$.
Obrázok: (Pozri obr. 7)
Úloha má 0, 1, 2 alebo nekonečne veľa riešení.
b) Postup konštrukcie:
1. Kružnica k so stredom v bode A s polomerom 5 cm.
2. Bod B, ktorý je priesečníkom priamky p a kružnice k.
3. Rovnobežka r s priamkou AB prechádzajúca cez bod C.
4. Rovnobežka s s priamkou BC prechádzajúca cez bod A.
5. Bod D, ktorý je priesečníkom priamok s a r.
6. Rovnobežník $ABCD$.
Obrázok: (Pozri obr. 8)
Úloha má 0, 1 alebo 2 riešenia.

112/13 Postup konštrukcie:
1. Kružnica k so stredom v bode A s polomerom 5 cm.
2. Bod B, ktorý je priesečníkom priamky p a kružnice k.
Ak základňa je BC, tak:
3. Rovnobežka m s priamkou BC prechádzajúca bodom A.
4. Bod D ležiaci na priamke m tak, aby AB a CD boli rovnako dlhé.
Ak základňa je AB, tak:
3. Rovnobežka m s priamkou AB, prechádzajúca cez bod C.
4. Bod D ležiaci na priamke m tak, aby AD a BC boli rovnako dlhé.
5. Rovnoramenný lichobežník $ABCD$.

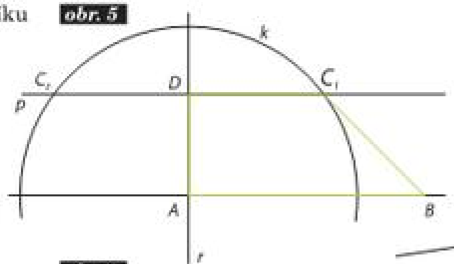
obr. 3



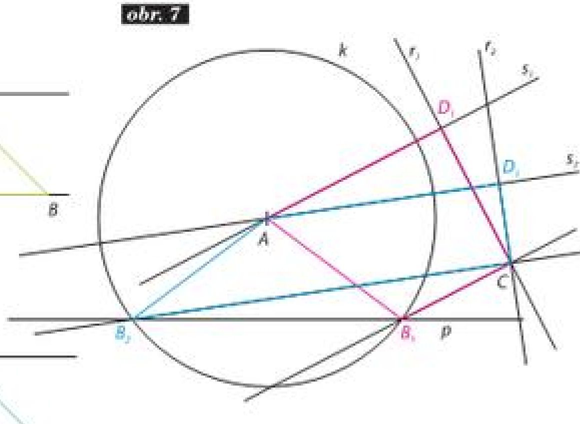
obr. 4



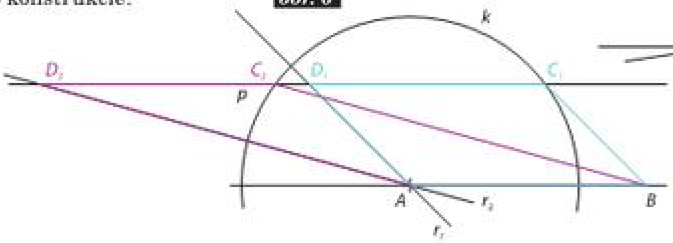
obr. 5



obr. 7



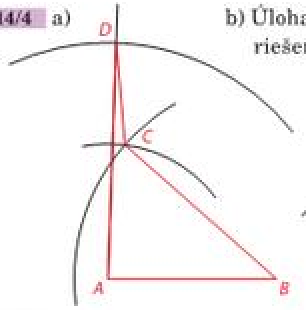
obr. 6



Úloha má 0 – 4 riešenia v závislosti od polohy bodov A, C a priamky p. Na obrázku je poloha, pri ktorej vyšli 3 riešenia: (Pozri obr. 9)

Rysujeme po častiach

114/4 a)



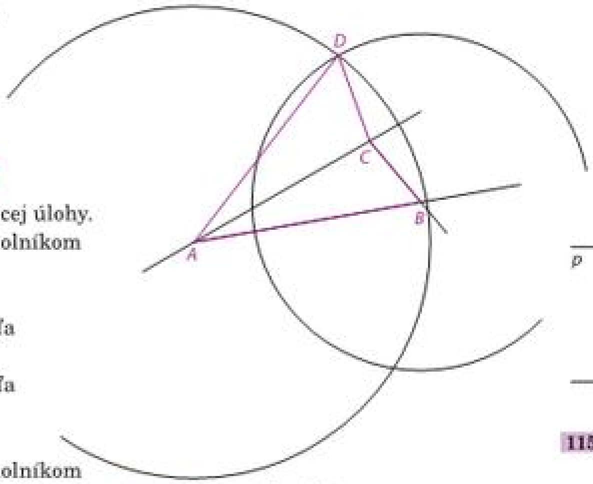
b) Úloha nemá riešenie.

114/5 Pozri riešenie nasledujúcej úlohy.

114/6 1. možnosť: Začať trojuholníkom ACD:
Postup konštrukcie:
1. Trojuholník ACD podľa vety sss.
2. Trojuholník ABC podľa vety usu.
3. Štvoruholník $ABCD$.
2. možnosť: Začať trojuholníkom ABC:
Postup konštrukcie:
1. Trojuholník ABC podľa vety usu.
2. Trojuholník ACD podľa vety sss.
3. Štvoruholník $ABCD$.
Úloha má 2 riešenia.
Obrázky – pozri riešenie ďalšej úlohy.

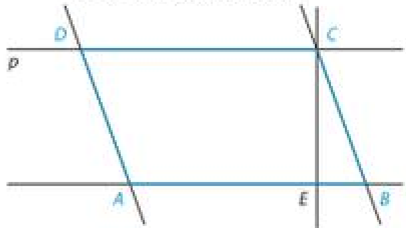
114/7 (Pozri obr. 10)

114/8 Trojuholníkom ABC. Postup konštrukcie:
1. Trojuholník ABC podľa vety usu.
2. Trojuholník ABD podľa vety sss (strana AB už je narysovaná).
3. Štvoruholník $ABCD$.



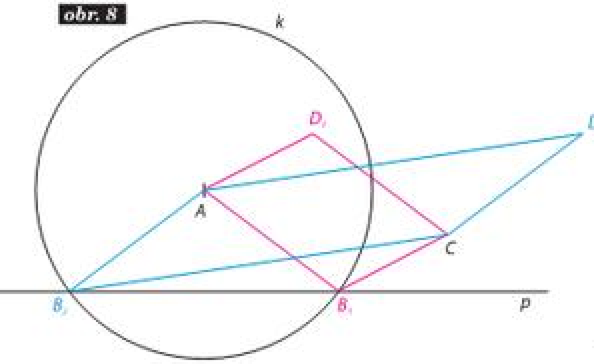
114/10 (Pozri obr. 11)
Postup konštrukcie:
1. Rovnobežky p, r vo vzdialenosti 4 cm a bod B na priamke p.
2. Bod A na priamke p vo vzdialenosti 7 cm od bodu B.
3. Uhol ABX s veľkosťou 70°.
4. Bod C, ktorý je priesečníkom polpriamky BX a priamky r.
5. Bod D na priamke r vo vzdialenosti 7 cm od bodu C.
6. Rovnobežník $ABCD$.
Úloha má 1 riešenie (útvary na obrázku sú totiž rovnaké rovnobežníky, iba jeden z nich je otočený „naruby“).

114/11 **1.** Trojuholník BCE podľa vety usu.
2. Bod A ležiaci na polpriamke BE vo vzdialenosti 7 cm.
3. Rovnobežka p s priamkou AB cez bod C.
4. Bod D na priamke p vo vzdialenosti 7 cm od bodu C.
5. Rovnobežník $ABCD$.

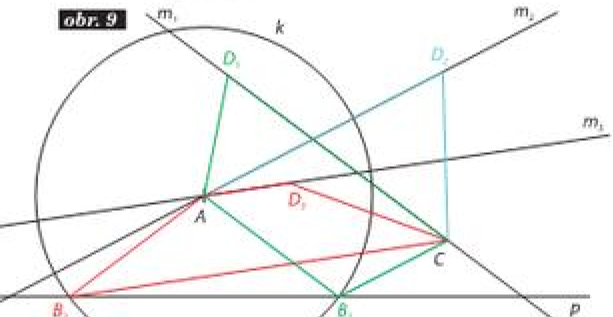


115/12 **1.** Strana AB s dĺžkou 7 cm.
2. Uhol ABX s veľkosťou 70°.
3. Uhol BAY s veľkosťou 110°.
4. Priamka p rovnobežná s priamkou AB vo vzdialenosti 4 cm.
5. Bod C, ktorý je priesečníkom priamky p a polpriamky BX.
6. Bod D, ktorý je priesečníkom priamky p a polpriamky AY.
7. Rovnobežník $ABCD$.

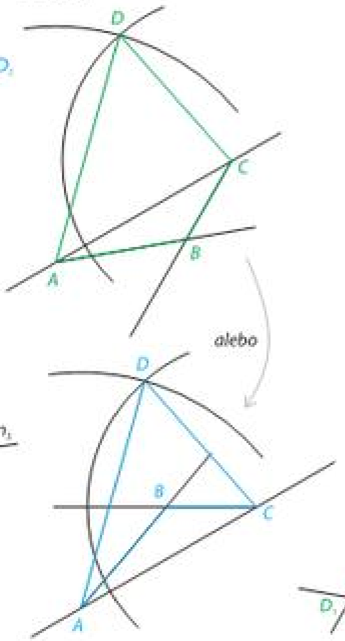
obr. 8



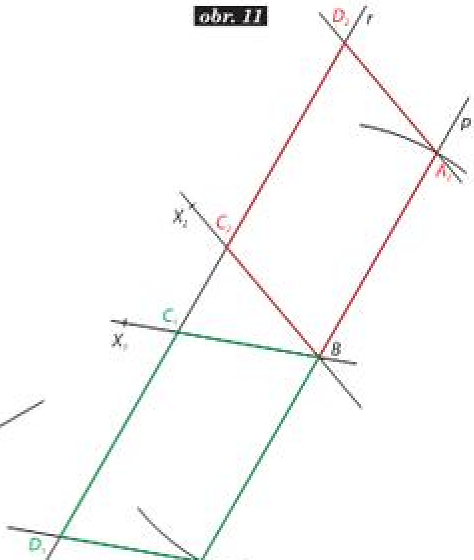
obr. 9

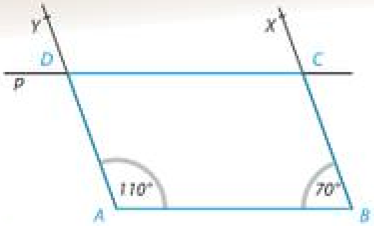


obr. 10



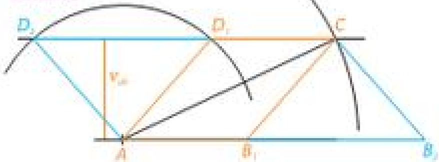
obr. 11



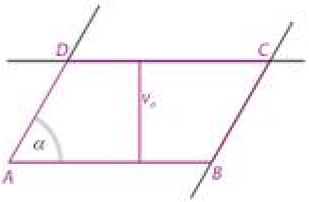


115/13 Postup konštrukcie:
1. Rovnobežky p, r vo vzdialenosti 3 cm.
2. Bod B ležiaci na priamke p.
3. Bod C, ktorý leží na priamke p a je od bodu B vzdialený 4 cm.
4. Bod D, ktorý leží na priamke r vo vzdialenosti 7 cm od bodu C.
5. Bod A, ktorý leží na priamke r vo vzdialenosti 4 cm od bodu D.
6. Rovnobežník $ABCD$.

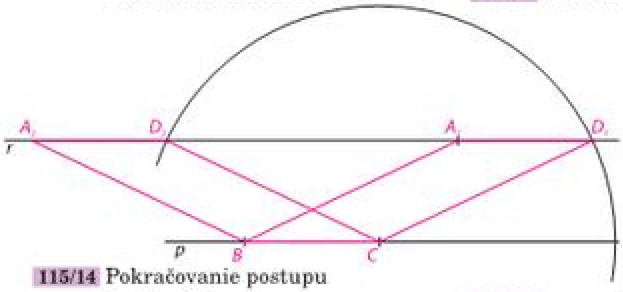
115/16



115/17

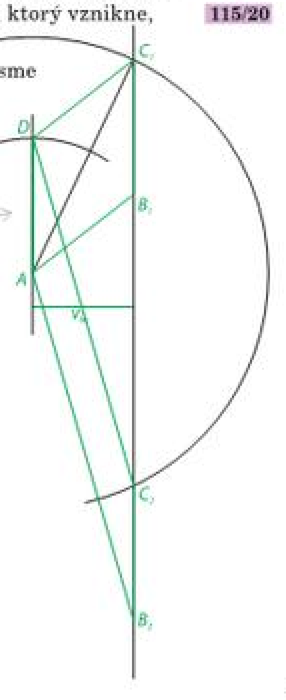


115/18 Nedá sa narysovať.

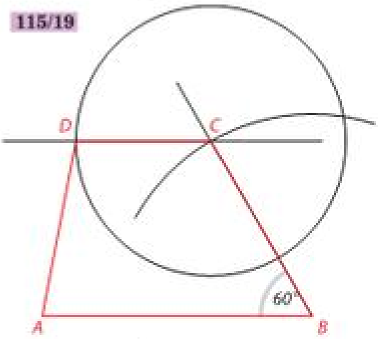


115/14 Pokračovanie postupu konštrukcie:
4. Kružnica l so stredom v bode C a s polomerom 8 cm.
5. Bod A, ktorý je priesečníkom priamky s a kružnice l.
6. Rovnobežka r s priamkou BC prechádzajúca cez bod A.
7. Bod D, ktorý je priesečníkom priamky t a priamky r.
8. Rovnobežník $ABCD$.
Vzniknú dva rôzne rovnobežníky, takže úloha má 2 riešenia. V bode tri si druhý bod, ktorý vznikne, nebudeme všímať, lebo by sme dostali rovnaké rovnobežníky.

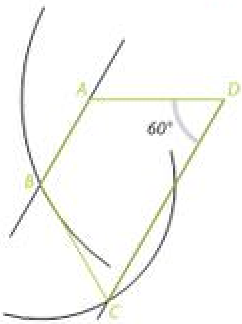
115/15



115/19



115/20



Rubriky

Koľko nás bude? (1. časť)

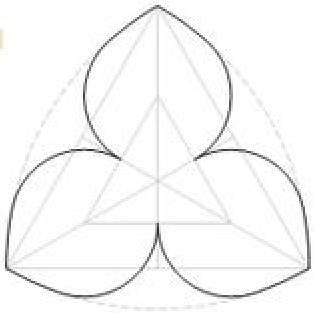
6/1 Zo sledovaných rokov malo Slovensko naposledy prirodzený úbytok v roku 2003. Jeho hodnota bola 517.
6/2 798
6/3 798 : 5 = 159,6

Zrážky a kaktusy

16/1 Graf patrí k druhej oblasti.

Gotické oblúky 1

23/1



Bádame na štvorčekovej sieti 1

26/1 Napr. a) Priamka a je o 5 cm vyššie ako priamka b.
b) Priamka b je o 5 cm nižšie ako priamka a.
c) Priamka c je o 4 cm vľavo od priamky d. Priamka d je o 4 cm vpravo od priamky c.
d) Priamka a je kolmá na priamku c a nachádza sa 2 cm zhora.
e)Priamka b je kolmá na priamku d a nachádza sa 4 cm zdola.
26/2 a) Bod A sa nachádza 3 cm napravo a 2 cm zhora od ľavého horného rohu štvorčekovej siete.
b) Bod B sa nachádza 7 cm napravo a 3 cm zhora od ľavého horného rohu štvorčekovej siete. Bod C sa nachádza 5 cm napravo a 7 cm zhora od ľavého horného rohu štvorčekovej siete. Bod D sa nachádza 2 cm napravo a 9 cm zhora od ľavého horného rohu štvorčekovej siete.
c) Bod E sa nachádza 2 cm naľavo a 2 cm smerom nadol od bodu A.
d) Bod A sa nachádza 2 cm napravo a 2 cm smerom nahor od bodu E.
e) Bod F sa nachádza 2 cm

napravo a 5 cm smerom nadol od bodu B. Bod B sa nachádza 2 cm naľavo a 5 cm smerom nahor od bodu F.

Nadváha a obezita 2

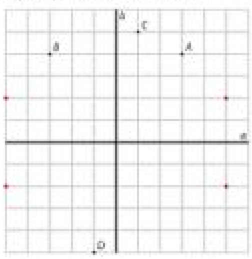
29/1 Obéznych bolo 7,39 % účastníkov prieskumu.

29/2 Áno, vyplýva. Uvedieme dve riešenia, v prvom využijeme údaje zo stĺpca percento – nadváha, v druhom údaje zo stĺpca počet – nadváha:
1. Predposledný stĺpec v obidvoch tabuľkách udáva počet percent detí s nadmernou hmotnosťou v skúmanej vzorke. U chlapcov je 12,33 %, u dievčat 12,75 %. Počet percent je väčší u dievčat, preto odpoveď je áno.
2. V oboch prípadoch je 120 detí s nadmernou hmotnosťou. Preto by sa zdalo (a časť žiakov to tak pravdepodobne vyrieši), že správna odpoveď je nie. Správna odpoveď je však áno, lebo vzorka skúmaných dievčat je menšia (941) ako vzorka skúmaných chlapcov (973). Teda 120 dievčat je väčšia časť zo skúmaných 941 dievčat ako 120 chlapcov zo skúmaných 973 chlapcov.

29/3 a) Je to počet percent obéznych 16-ročných chlapcov (je ich 68) zo všetkých skúmaných 16-ročných chlapcov (je ich 1 055), výsledok je zaokrúhlený na 2 desatinné miesta. b) Výsledok výpočtu v tabuľke je správny.

Bádame na štvorčekovej sieti 2

40/1 a) 4 riešenia: Bod, ktorý je 1 cm napravo od bodu C. Bod, ktorý je 3 cm naľavo od bodu C. Bod, ktorý je 3 cm napravo od bodu D. Bod, ktorý je 1 cm naľavo od bodu D.
b) Tiež 4 riešenia.

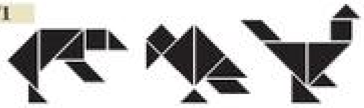


c) Bod A je vzdialený 4 cm od priamky a a 3 cm od priamky b. Bod B je vzdialený 4 cm od priamky a a 3 cm od priamky b. Bod C je vzdialený 5 cm od priamky a a 1 cm od priamky b. Bod D je vzdialený 5 cm od priamky a a 1 cm od priamky b.

40/2 Napr.:
a) Bod A: 4 doprava, 1 hore,
b) bod B: 8 doprava, 7 hore,
bod C: 3 doprava, 9 hore,
bod D: 1 doprava, 4 hore,
bod E: 9 doprava, 0 hore.

Tangram 2

44/1



Koľko nás bude? (2. časť)

60/1 Nie.

60/2 Prirodzené prírastky v jednotlivých rokoch uvedené v tabuľke:

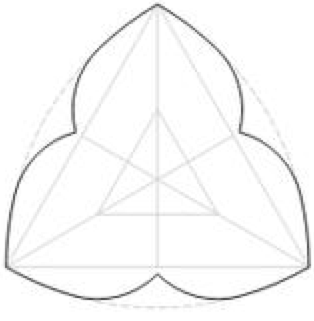
rok	2001	2002	2003	2004	2005
prirodzený prírastok	–844	–691	–517	1 895	955

Prirodzené prírastky v jednotlivých rokoch uvedené v grafe:

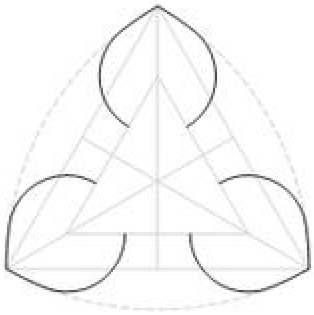
60/3 Za správnu odpoveď považujeme každé prirodzené číslo spomedzi čísel 52 701, 52 702, ..., 52 751.
Poznámka: Skutočný počet zomretých v roku 2000 bol 52 724.

Gotické oblúky 2

68/1 Ak vnútorný trojuholník zmenšíme, dostaneme „tlstejší" trojlístok.



Ak vnútorný trojuholník zväčšíme, jednotlivé lístky sa vôbec nespoja.



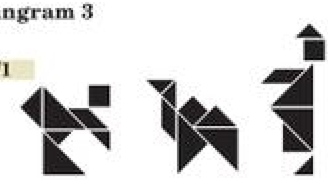
Bádame na štvorčekovej sieti 4

80/1 Napr.:
Bod A: 3 modré, 2 zelené,
bod B: –4 modré, 1 zelená,
bod C: 2 modré, 3 zelené,
bod D: –4 modré, –2 zelené,
bod E: –2 modré, –4 zelené,
bod F: 3 modré, –2 zelené,
bod G: 2 modré, –4 zelené,
bod H: –3 modré, 4 zelené.

80/2 Bod C: 2; 3; bod D: –4; –2; bod E: –2; –4; bod F: 3; –2; bod G: 2; –4; bod H: –3; 4.

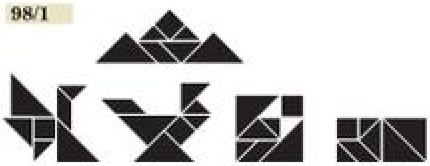
Tangram 3

88/1



Tangram 4

98/1



ŤAHÁK – ZOPAKUJME SI TO NAJDÔLEŽITEJŠIE

CELÉ ČÍSLA

Delenie celých čísel

Dve čísla delíme tak, že vydelíme najprv čísla bez znamienka a do výsledku dopíšeme znamienko **mínus**, ak majú čísla rôzne znamienka, **plus**, ak obe majú rovnaké znamienko.

deleno	plus	mínus
plus	plus	mínus
mínus	mínus	plus

$12 : 4 = +3$ $\quad 12 : (-4) = -3$ $\quad -12 : 4 = -3$ $\quad -12 : (-4) = +3$

(Znamienko + vo výsledku nemusíme písať.)

Racionálne čísla

Racionálne čísla sú všetky čísla, ktoré sa dajú zapísať zlomkom, ktorého čitateľ je celé číslo a menovateľ je prirodzené číslo. Racionálne čísla majú konečný desatinný zápis (desatinné čísla) alebo nekonečný periodický desatinný zápis. Počítame s nimi podľa rovnakých pravidiel, ako počítame s celými číslami.

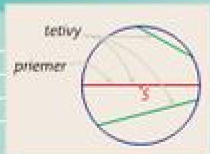
UHLY V TROJUHOLNÍKOCH A ŠTVORUHOLNÍKOCH

Oproti rovnakým uhlom v trojuholníku ležia rovnako dlhé strany. Platí to aj naopak, čiže oproti rovnako dlhým stranám v trojuholníku ležia rovnako veľké uhly.
Oproti dlhšej strane v trojuholníku leží väčší uhol. Platí to aj naopak, čiže oproti väčšiemu uhlu v trojuholníku leží dlhšia strana.
Súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je presne 180°.
Súčet vnútorných uhlov v každom štvoruholníku je presne 360°.

KRUŽNICA A KRUH

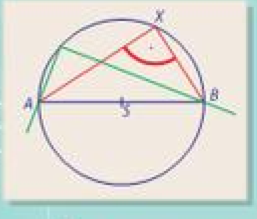
Kružnica je uzavretá čiara, ktorej všetky body sú rovnako vzdialené od toho istého bodu – stredu kružnice.
Kruh je plocha, ktorá je ohraničená kružnicou.

Tetiva kružnice je úsečka, ktorej krajné body ležia na kružnici.
Priemer kružnice je najdlhšia tetiva. Je to tetiva, ktorá prechádza stredom kružnice.



Tálesova kružnica

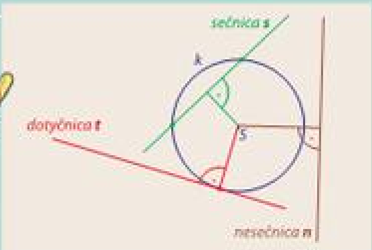
Na obrázku je úsečka *AB*. Všetky body *X*, pre ktoré je uhol *AXB* pravý, tvoria kružnicu bez bodov *A*, *B*. Úsečka *AB* je jej priemer. Túto kružnicu voláme Tálesova kružnica nad priemerom *AB*.



Troma bodmi, ktoré neležia na jednej priamke, je určená jediná kružnica. Dve **rôzne** kružnice nemôžu mať spoločné 3 body.

Vzájomná poloha priamky a kružnice

Kružnica a priamka nemôžu mať 3 alebo viac spoločných bodov.



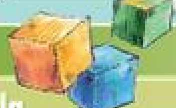
Dĺžka kružnice, obvod kruhu

Pomer obvodu kružnice a priemeru je v každej kružnici rovnaký: $\frac{o}{d} = \pi \doteq 3{,}14$

Obsah kruhu s polomerom *r* je $S = \pi \cdot r \cdot r \doteq 3{,}14 \cdot r \cdot r$

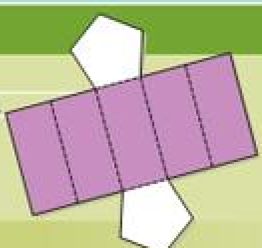
Dĺžka kružnice alebo obvod kruhu s priemerom *d* je $o = \pi \cdot d \doteq 3{,}14 \cdot d$

Dĺžka kružnice alebo obvod kruhu s polomerom *r* je $o = 2 \cdot \pi \cdot r \doteq 6{,}28 \cdot r$



HRANOLY

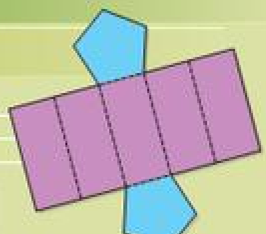
Bočné steny hranola spolu vytvárajú plášť hranola (*Q*).



Povrch hranola

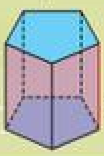
Povrch hranola je súčet obsahov všetkých jeho stien, teda súčet obsahov dvoch podstáv (*S*) a obsahu plášťa (*Q*).

$P = 2 \cdot S + Q$



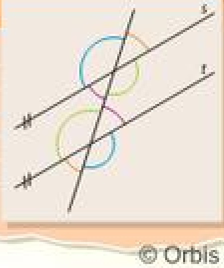
Objem hranola

$V = S \cdot v$, kde *S* je obsah podstavy a *v* je vzdialenosť dvoch podstáv – výška hranola.

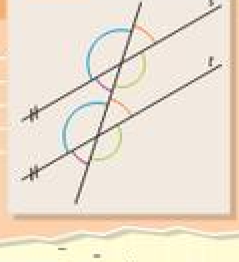


ROVNOBEŽNOSŤ

Na obrázku sú rovnobežné priamky *s* a *t*, farebne sú vyznačené 4 dvojice uhlov. Každú z týchto dvojíc voláme striedavé uhly pri rovnobežkách alebo skrátene **striedavé uhly**. V každej dvojici majú uhly rovnakú veľkosť.



Každú z farebne vyznačených dvojíc uhlov voláme súhlasné uhly pri rovnobežkách alebo skrátene **súhlasné uhly**. V každej dvojici majú uhly rovnakú veľkosť.



VZDIALENOSŤ A ŠTVORUHOLNÍKY

Rovnobežník

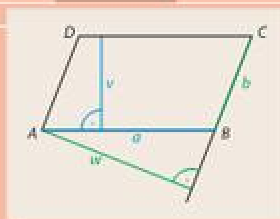
Štvoruholníky, v ktorých obe dvojice protiľahlých strán sú rovnobežné, voláme rovnobežníky.
V každom rovnobežníku platí:

- v každej z dvoch dvojíc protiľahlých strán sú strany rovnako dlhé,
- v každej z dvoch dvojíc protiľahlých uhlov sú uhly rovnako veľké,
- súčet každej dvojice vedľa seba ležiacich uhlov je 180°,
- uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú.

Zároveň platí, že ak má štvoruholník jednu z týchto vlastností, tak je to rovnobežník.

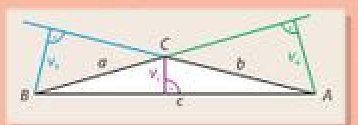
Obsah rovnobežníka

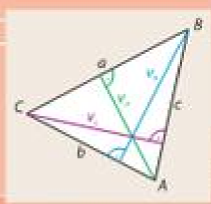
Výška rovnobežníka je vzdialenosť jeho protiľahlých strán. Každý rovnobežník má 2 výšky. Obsah rovnobežníka sa rovná súčinu dĺžky strany rovnobežníka a výšky na túto stranu.
Obsah rovnobežníka na obrázku je $S = a \cdot v$, ale tiež $S = b \cdot w$.

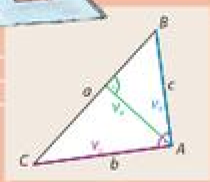


Výška a obsah trojuholníka

Výška trojuholníka je vzdialenosť vrcholu trojuholníka od priamky, na ktorej leží protiľahlá strana.
Trojuholník má 3 výšky.





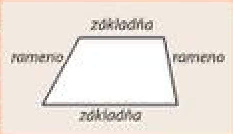


Obsah trojuholníka je polovica obsahu rovnobežníka, na ktorý sa dá trojuholník doplniť.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

Lichobežník

Lichobežník je štvoruholník, ktorý má iba dve strany navzájom rovnobežné. Tieto strany sa volajú **základne**. Strany, ktoré nie sú rovnobežné, sa volajú **ramená** lichobežníka.



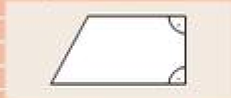
Výška lichobežníka je vzdialenosť rovnobežných priamok, na ktorých ležia základne. Lichobežník má iba jednu výšku.

Obsah lichobežníka je polovica obsahu rovnobežníka, na ktorý sa dá doplniť.

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Lichobežník, ktorý má dva pravé uhly, voláme **pravouhlý lichobežník**.

Lichobežník, ktorého ramená majú rovnakú dĺžku, voláme **rovnoramenný lichobežník**.

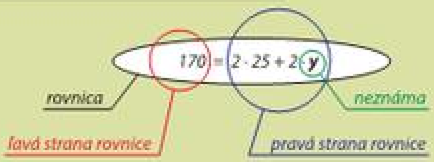


Súčet dvoch uhlov pri ramene lichobežníka je 180°.

VÝRAZY, VZORCE A ROVNICE

Zápisy, napr. $900 = 20 \cdot b$ $170 = 25 - y$ $21 = 60 + c$ $6 : x = 2$ $3s + 7 = 31$ sa volajú **rovnice**.

V rovnici okrem čísel vystupuje písmeno – premenná alebo **neznáma**. Riešiť rovnicu znamená nájsť všetky čísla, ktoré keď dosadíme za neznámu, dostaneme správne vypočítaný príklad.
Napr. ak za číslo **x** v 4. rovnici dosadíme 3, dostaneme správne vypočítaný príklad 6 : 3 = 2. Číslo 3 **je riešením** tejto rovnice.
Na druhej strane, ak v 1. rovnici za **b** dosadíme 3, dostaneme nesprávne vypočítaný príklad 900 = 20 · 3. Číslo 3 **nie je riešením** tejto rovnice.



Rovnice riešime tak, že sa postupne snažíme osamostatniť neznámu.

Napríklad a) z daného zápisu vytvoríme iný zápis – ten, kde je neznáma sama na jednej strane:

$900 = 20 \cdot b$

Iné zápisy sú: $900 = b \cdot 20$

$900 : 20 = b$

$900 : b = 20$

Z nich vyberieme 2. zápis: $900 : 20 = b$.
Keďže $900 : 20 = 45$, tak riešením je $b = 45$.

b) prenášaním z jednej strany na druhú

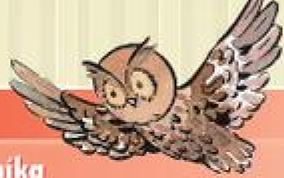
$21 = 60 + c$

60 prenesieme na druhú stranu ako – 60

$21 - 60 = c$

Keďže $21 - 60 = -39$, tak $c = -39$.

	Meno žiaka alebo žiačky	Šk. rok	Stav učebnice na začiatku šk. roka	Stav učebnice na konci šk. roka
1				
2				
3				
4				



VZDIALENOSŤ A ŠTVORUHOLNÍKY

Rovnobežník

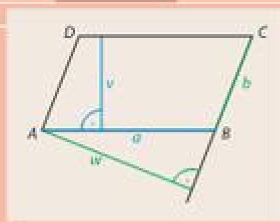
Štvoruholníky, v ktorých obe dvojice protiľahlých strán sú rovnobežné, voláme rovnobežníky.
V každom rovnobežníku platí:

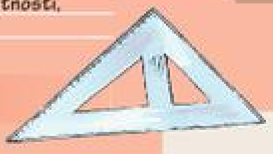
- v každej z dvoch dvojíc protiľahlých strán sú strany rovnako dlhé,
- v každej z dvoch dvojíc protiľahlých uhlov sú uhly rovnako veľké,
- súčet každej dvojice vedľa seba ležiacich uhlov je 180°,
- uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú.

Zároveň platí, že ak má štvoruholník jednu z týchto vlastností, tak je to rovnobežník.

Obsah rovnobežníka

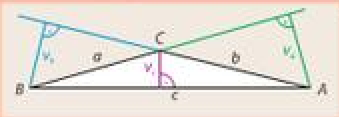
Výška rovnobežníka je vzdialenosť jeho protiľahlých strán. Každý rovnobežník má 2 výšky. Obsah rovnobežníka sa rovná súčinu dĺžky strany rovnobežníka a výšky na túto stranu.
Obsah rovnobežníka na obrázku je $S = a \cdot v$, ale tiež $S = b \cdot w$.

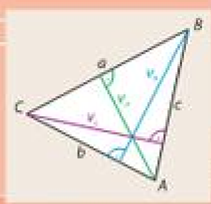


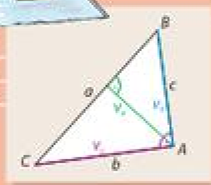


Výška a obsah trojuholníka

Výška trojuholníka je vzdialenosť vrcholu trojuholníka od priamky, na ktorej leží protiľahlá strana.
Trojuholník má 3 výšky.







Obsah trojuholníka je polovica obsahu rovnobežníka, na ktorý sa dá trojuholník doplniť.

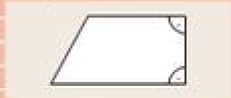
$$S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

Lichobežník

Lichobežník je štvoruholník, ktorý má iba dve strany navzájom rovnobežné. Tieto strany sa volajú **základne**. Strany, ktoré nie sú rovnobežné, sa volajú **ramená** lichobežníka.

Lichobežník, ktorý má dva pravé uhly, voláme **pravouhlý lichobežník**.

Lichobežník, ktorého ramená majú rovnakú dĺžku, voláme **rovnoramenný lichobežník**.



Výška lichobežníka je vzdialenosť rovnobežných priamok, na ktorých ležia základne. Lichobežník má iba jednu výšku.

Súčet dvoch uhlov pri ramene lichobežníka je 180°.

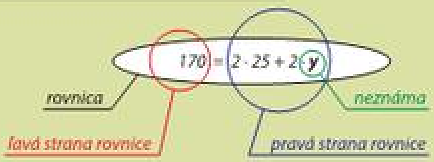
Obsah lichobežníka je polovica obsahu rovnobežníka, na ktorý sa dá doplniť.

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

VÝRAZY, VZORCE A ROVNICE

Zápisy, napr. $900 = 20 \cdot b$ $170 = 25 - y$ $21 = 60 + c$ $6 : x = 2$ $3s + 7 = 31$ sa volajú **rovnice**.

V rovnici okrem čísel vystupuje písmeno – premenná alebo **neznáma**. Riešiť rovnicu znamená nájsť všetky čísla, ktoré keď dosadíme za neznámu, dostaneme správne vypočítaný príklad.
Napr. ak za číslo x v 4. rovnici dosadíme 3, dostaneme správne vypočítaný príklad $6 : 3 = 2$. Číslo 3 **je riešením** tejto rovnice.
Na druhej strane, ak v 1. rovnici za b dosadíme 3, dostaneme nesprávne vypočítaný príklad $900 = 20 \cdot 3$. Číslo 3 **nie je riešením** tejto rovnice.



Rovnice riešime tak, že sa postupne snažíme osamostatniť neznámu.

Napríklad a) z daného zápisu vytvoríme iný zápis – ten, kde je neznáma sama na jednej strane:

$900 = 20 \cdot b$

Iné zápisy sú: $900 = b \cdot 20$

$900 : 20 = b$

$900 : b = 20$

Z nich vyberieme 2. zápis: $900 : 20 = b$.
Keďže $900 : 20 = 45$, tak riešením je $b = 45$.

b) prenášaním z jednej strany na druhú

$21 = 60 + c$

60 prenesieme na druhú stranu ako – 60

$21 - 60 = c$

Keďže $21 - 60 = -39$, tak $c = -39$.

	Meno žiaka alebo žiačky	Šk. rok	Stav učebnice na začiatku šk. roka	Stav učebnice na konci šk. roka
1				
2				
3				
4				

Obsah

7. Racionálne čísla /4

Celé čísla – pokračovanie /4

Násobenie a delenie celých čísel /4

Racionálne čísla /7

Účtovné knihy a farebné čísla ešte raz /7

Kladné a záporné racionálne čísla a výpočty s nimi /9

Krížom-krážom s racionálnymi číslami /15

8. Rovnobežnosť a štvoruholníky /17

Štvoruholníky /17

Malý návrat k uhlom /19

Striedavé a súhlasné uhly /20

Rovnobežníky /24

Rozdelenie rovnobežníkov /27

Lichobežník /30

Tangram a iné skladačky /33

9. Šanca a pravdepodobnosť /35

Tombola /35

Pravdepodobnosť /38

Hádžeme hracou kockou /41

Hádžeme mincami /45

Hráme sa ďalšie hry /46

Vyberáme skupiny /50

Hazardné hry /52

Párne či nepárne? /54

10. Obsahy geometrických útvarov /56

Výška a obsah rovnobežníka /56

Obsah trojuholníka /61

Obsah lichobežníka /63

11. Výrazy, vzorce a rovnice I /65

Rovnice na súčet a rozdiel /69

Rovnice, kde neznáma je jeden zo sčítancov /69

Rovnice, kde neznáma je menšiteľ /71

Rovnice, kde neznáma je menšenec /72

Marcelova pomôcka /73

12. Hranoly II /75

Povrch hranola /75

Objem hranola /78

13. Kružnica a kruh II /81

Dĺžka kružnice a obvod kruhu /81

Obsah kruhu /86

14. Výrazy, vzorce a rovnice II /89

Rovnice na súčin a podiel /89

Rovnice, kde neznáma jeden z činiteľov /89

Rovnice, kde neznáma je deliteľ /91

Rovnice, kde neznáma je delenec /92

Druhá Marcelova pomôcka /93

Zložitejšie rovnice /95

Ďalšie slovné úlohy /99

Slovné úlohy a kontrola ich riešení /101

15. Konštrukcie mnohouholníkov /103

Rysujeme podľa návodu /103

Dokončujeme konštrukcie /109

Rysujeme po častiach /112

Výsledky úloh /117

ISBN 978-80-8120-712-9